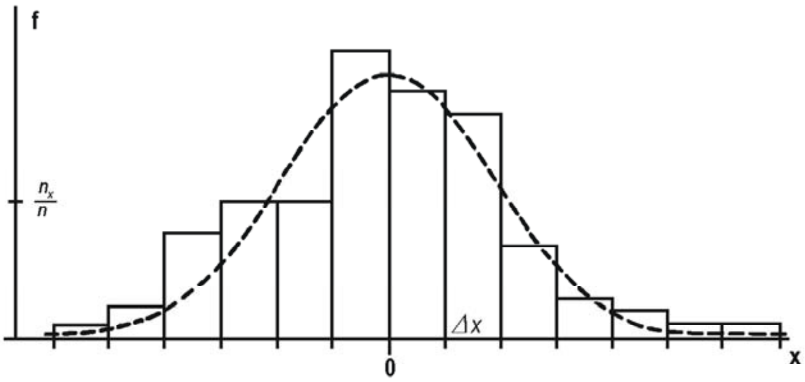
Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Ingegneria

Dispensa

NOZIONI SULLA TEORIA DEGLI ERRORI DI OSSERVAZIONE



Vincenzo Franco
Mauro Lo Brutto

Marzo 2004

La presente dispensa rappresenta un aggiornamento e un'integrazione della parte relativa alla Teoria degli Errori delle dispense del Corso di Topografia del Prof. W. Rizzoni.

INTRODUZIONE

Se si misura più volte la stessa grandezza si hanno risultati diversi specialmente se le misure si fanno con alta precisione.
Se, per esempio, si misura su una carta la distanza fra due punti con il doppio decimetro le determinazioni ottenute fino al 0.1 mm saranno sempre l'una diversa dall'altra. Se però si vuole un'approssimazione minore (per es. il mm) le varie determinazioni risulteranno coincidenti.
Nascono allora i quesiti:

a. Quale valore assumere per una grandezza della quale si sono fatte misure con risultati non coincidenti?
b. Quale sarà il grado di precisione da attribuire a tale valore?
c. Il sistema di misura sarà accettabile?

A questi quesiti le risposte le da la **teoria degli errori di osservazione** che trova applicazione in tutte le scienze di osservazione, quando si effettuano numerose misure di una grandezza. I risultati non sono rigorosi ma sono tanto più accettabili quanto maggiore è il numero delle determinazioni della grandezza in esame.
Gli sviluppi di tale teoria consentono poi di ricavare, per i vari tipi di misura, la precisione che ci si deve attendere nel determinarle e, quindi, la tolleranza accettabile per ciascun tipo di operazioni.

MISURE

Le misure si classificano in *dirette* e *indirette*. Sia le une che le altre possono essere condizionate.

Sono **misure dirette** di una grandezza quelle che possono eseguirsi sovrapponendo l'unità di misura alla grandezza da misurare e leggendo direttamente il valore. Per esempio le misure di una lunghezza effettuata mediante l'impiego di un metro.

Sono **misure indirette** di una grandezza quelle che possono essere ottenute attraverso relazioni analitiche che legano tra loro altre grandezze misurate direttamente. Per esempio, come si vedrà in seguito, il dislivello Δ_{AB} tra due punti può essere ricavato dalla relazione $\Delta_{AB} = D\ cotgz+s-h$ dove D rappresenta la distanza topografica tra A e B, *z* l'angolo zenitale e *s* e *h* rispettivamente l'altezza strumentale e l'altezza della mira. In questo caso, quindi, la misura del dislivello viene ricavata fondamentalmente dalla misura di una distanza, di un angolo e di due altezze.

Le misure vengono poi definite **condizionate**, quando le grandezze che si determinano debbono sottostare a delle condizioni note. Ad esempio se si misurano gli angoli interni di un poligono di *n* vertici, le misure effettuate dovranno soddisfare la condizione:

$$\Sigma\alpha_i = (n-2)\pi$$

E' evidente che in tutti questi casi l'errore da cui sarà affetta la grandezza che si ricava dipenderà dagli errori commessi nel determinare i valori delle grandezze direttamente misurabili.

TIPI DI ERRORI

Si definisce **errore assoluto** di una qualunque delle misure effettuate la differenza tra il valore della grandezza e il valore misurato; l'**errore relativo** è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura della grandezza.

Circa la natura degli errori da cui sono affette le misure, diremo che tali errori si suddividono in tre categorie: grossolani, sistematici e accidentali.

Sono **errori grossolani** (*outlier*) quelli dovuti a qualche svista nell'eseguire le misure come, ad esempio, il contare un numero di unità di misura diverso da quello reale, se per esempio si esegue una determinazione diretta di lunghezza; nel leggere ad una graduazione un valore errato, se si misura un angolo, ecc. Tali errori non sono temibili quando si effettuino più misure di una grandezza perché allora si nota subito se fra le misure concordanti ce n'è qualcuna che si discosta notevolmente dalle altre. Conviene però cercare di rendersi conto della causa di tale scostamento.

Gli **errori sistematici** (*bias*) sono quelli dovuti all'impiego di uno strumento o un metodo di misura che faccia sbagliare sempre nello stesso senso. Tali errori hanno dunque segno costante e possono influire anche gravemente sulle misure; in genere operando con accuratezza possono essere individuati e valutati. Si possono quindi correggere le misure o si possono usare gli strumenti con metodi che consentano di eliminare tali errori. Ad esempio, vedremo che nella misura degli angoli orizzontali alcuni errori dovuti a difetti strumentali si possono eliminare effettuando due letture in opportune posizioni dello strumento e facendone la media (letture coniugate).

Gli **errori accidentali** o **casuali**, sono errori dovuti a cause diverse, indipendenti fra di loro, che possono agire sia in un senso che nel senso opposto. Sono generalmente dovuti all'osservatore, agli effetti dell'ambiente, agli strumenti, all'ora di osservazione, ecc. e possono contenersi in limiti ristretti se si opera con attenzione e con le necessarie cautele. Tali errori si presentano quindi nelle misure a volte con un segno, a volte col segno opposto, e quasi sempre con valori piuttosto piccoli.

Gli errori accidentali sono inevitabili nelle misure, tuttavia si può ridurre il loro effetto ripetendo più volte la misura di una grandezza e considerando l'errore accidentale come una variabile casuale (aleatoria) La "teoria degli errori" si occupa esclusivamente degli errori accidentali e fornisce i criteri per elaborare i risultati di più misure della stessa grandezza allo scopo di:

- determinare i limiti entro i quali devono essere contenuti gli errori per poter essere considerati casuali;
- calcolare il valore più probabile della grandezza;
- definire un giudizio sulla precisione delle misure eseguite.

POSTULATO DELLA MEDIA - CURVA DI GAUSS

Osserviamo che in genere non ha senso parlare di "**valore vero**" di una grandezza, e si può più convenientemente parlare di "**valore istantaneo**" e in determinate condizioni, in quanto le grandezze fisiche variano nel tempo per diverse cause, fra le quali la temperatura, la pressione e l'umidità relativa dello ambiente. Solo in alcuni casi si può definire il valore vero di una grandezza come, ad esempio, quando si tratti della somma dei tre angoli di un triangolo piano (che dev'essere eguale a 180°) o della somma degli angoli in giro d'orizzonte attorno ad una stazione (che dev'essere un angolo giro). In mancanza del valore vero, e confortati dal fatto che, se pure le grandezze fisiche sono variabili, le loro variazioni sono generalmente molto piccole e spesso inferiori all'approssimazione dei nostri mezzi di misura, si definisce un valore "**più conveniente**" o "**più attendibile**" della grandezza, ricavato dal sistema di misure effettuate, secondo un criterio prestabilito e generalmente accettato.
Il criterio che si accetta per determinazioni omogenee (cioè eseguite dallo stesso osservatore, con gli stessi mezzi strumentali, presso a poco nello stesso tempo, nelle stesse condizioni ambientali,

con la stesse accuratezza) é quello di prendere come valore più conveniente della grandezza la media aritmetica delle determinazioni eseguite (**Postulato della media**).
Siano $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i valori ottenuti nell'effettuare n misure di una stessa grandezza X. Si assume come valore più conveniente della grandezza, il numero dato dalla relazione:

$$X_o = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Si chiamano **errori apparenti** o **scarti** (v_i) le differenze fra i risultati delle determinazioni eseguite ed il valore più conveniente:

$$v_1=X_1-X_o,\ v_2=X_2-X_o,\ \ldots\ldots,v_n=X_n-X_o$$

Si chiamano **errori veri** (x_i) le analoghe differenze nel caso in cui della grandezza oggetto di misura si conosce il valore vero:

$$x_1=X_1-X,\ x_2=X_2-X,\ \ldots\ldots,x_n = X_n-X$$

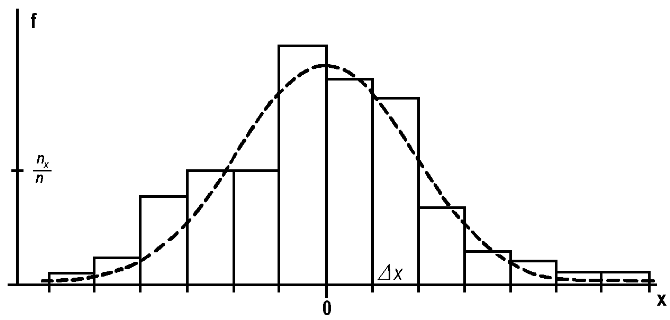
Se si effettuano numerose misure di una grandezza nota (somma degli angoli interni di un triangolo ad es.) e si calcolano, come ora detto, gli errori veri, si trova sperimentalmente che tali errori soddisfano le seguenti considerazioni:

- *gli errori positivi si presentano con uguale frequenza di quelli negativi;*
- *gli errori piccoli sono più frequenti di quelli grandi (*gli errori si addensano intorno allo zero, cioè se si considerano due intervalli di eguale ampiezza uno prossimo allo zero e l'altro più discosto, nel primo cade un numero maggiore di errori);
- *gli errori sono sempre compresi entro due determinati limiti.*

Se si distribuiscono gli errori su un asse delle ascisse, si divide l'intervallo totale in cui essi cadono in tanti intervalli uguali Δx e si calcolala la frequenza $f=n_i/n$ (numero n_i degli errori che cadono nell'intervallo diviso per il numero totale n degli errori) dell'errore in ciascun intervallo si troveranno numeri decrescenti man mano che ci si allontana dall'origine. Riportiamo su ogni intervallo Δx un rettangolo con ordinata y tale che sia:

$$y_i \cdot \Delta x = n_i/n$$

cioè tale che l'area del rettangolo risulti eguale alla frequenza dell'errore in quel l'intervallo, in una scala prefissata; si otterrà un diagramma del tipo di quello disegnato.



L'area di tale diagramma é uguale a 1 in quanto si ha:

$$\sum \frac{n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Se si passa al limite per Δx tendente a zero, nella ipotesi che le osservazioni siano infinitamente numerose e si distribuiscano con continuità sull'asse, il diagramma diventa una curva (**curva di frequenza teorica di Gauss**, stessa figura) che esprime la legge teorica di distribuzione della frequenza degli errori per un sistema di misure che soddisfi le condizioni sopra enunciate.

Se si accetta il postulato della media, si trova che gli errori apparenti (v_i), per sistemi con numerose osservazioni, soddisfano le leggi trovate sperimentalmente per gli errori veri, cioè si distribuiscono con molta approssimazione secondo la legge di Gauss.
L'equazione della curva di Gauss é:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

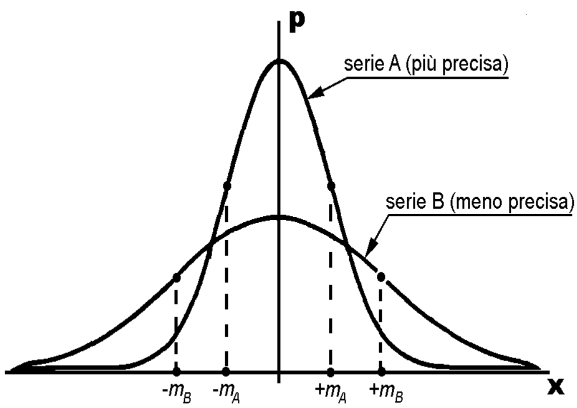
dove h è una costante che ha un valore in corrispondenza a ciascun sistema di misure e dalla quale dipende la forma della curva. Precisamente, se consideriamo le due curve

$$y_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} \qquad y_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x^2}$$

con $h_1>h_2$ avremo che nell'origine hanno rispettivamente ordinate pari a:

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \qquad \frac{h_2}{\sqrt{\pi}}$$

L'ordinata nell'origine è dunque maggiore per la prima curva e, dato che l'area compresa fra ciascuna curva e l'asse delle x deve essere uguale ad 1 l'andamento dei due diagrammi sarà quello indicato in figura.



Ciò indica che il sistema di osservazioni che ammette come curva di frequenza degli errori quella avente costante h maggiore é migliore dell'altro. In esso gli errori piccoli in valore assoluto si presentono con maggiore frequenza che nell'altro. Perciò il parametro h si chiama "**Precisione del sistema di misure**".

PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI

Il valore più conveniente di una grandezza si può ricavare dagli *n* valori risultanti dalle misure in base ad altri criteri che si ritengano accettabili. Si può, ad esempio, procedere come segue: ammesso che sia ξ_0 il valore più conveniente della grandezza, gli errori commessi nelle n misure effettuate sono:

$$X_1 - \xi_0,\ X_2 - \xi_0,\ \dots\dots\dots,\ X_n - \xi_0$$

Tali errori possono risultare in parte positivi ed in parte negativi, ed al variare di ξ_0 variano. Si può accettare di scegliere fra tutti i valori che possono darsi a ξ_0 come più conveniente, quello per il quale la somma dei quadrati degli errori risulta minima (**Principio dei minimi quadrati**).

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \min$$

Per tale valore, essendo minima la somma dei quadrati degli errori, gli errori stessi dovranno risultare in valore assoluto piccoli in confronto a quelli corrispondenti agli altri valori possibili di ξ_0. Consideriamo tale somma:

$$f(\xi_0) = (X_1 - \xi_0)^2 + (X_2 - \xi_0)^2 + \dots\dots\dots + (X_n - \xi_0)^2$$

che é funzione di ξ_0 e cerchiamo il valore ξ_0 che la rende minima. Basterà uguagliare a zero la derivata della funzione scritta rispetto a ξ_0 e risolvere rispetto a ξ.

$$2(X_1 - \xi_0) + 2(X_2 - \xi_0) + \dots\dots\dots + 2(X_n - \xi_0) = 0$$

Risolvendo si ottiene:

$$\xi_o = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Questo valore non può essere un massimo, per la funzione f(ξ), in quanto una somma di quadrati é sempre crescente al crescere (in valore assoluto) delle basi; quindi è il valore che rende minima la somma dei quadrati degli errori. Il Principio dei minimi quadrati porta a scegliere come valore più conveniente di una grandezza la media aritmetica delle determinazioni fatte della grandezza stessa. Questo principio equivale al postulato della media e lo rafforza. Si ha cioè:

$$X_0 = \xi_0$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

Si visto che la precisione *h* caratterizza i sistemi di osservazioni, nel senso che migliore é un sistema maggiore é il parametro *h* che gli corrisponde; in pratica, però, si preferisce usare, per

caratterizzare i sistemi, un altro parametro, che denoteremo con **m**, detto **errore quadratico medio**[1] **(e.q.m.)**.
Questo parametro può essere definito come:

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 e^{-h^2 x_i^2} dx$$

Si dimostra che:

$$m = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

L'errore quadratico medio é inversamente proporzionale alla precisione, e un sistema é tanto migliore quanto più piccolo é il suo m.
Nella pratica facciamo un numero finito di determinazioni e quindi gli errori sono in numero finito. Se si pensa di dividere l'intervallo in cui cadono in tanti intervalli di ampiezza Δx, all'integrale si può sostituire una somma di un numero finito di termini.

$$m^2 = \sum \frac{h}{\sqrt{\pi}} x_i^2 e^{-h^2 x_i^2} \Delta x$$

Ricordando che

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \qquad\qquad y\Delta x = \frac{n_i}{n}$$

con Δx tanto piccolo che in ogni intervallo non cada più di 1 errore ($n_i = 1$)

$$m^2 = \sum \frac{n_i}{n} x_i^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}{n}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}{n}}$$

Si é così trovato come calcolare l'errore quadratico medio di un sistema di misure: esso è **la radice quadrata della media dei quadrati degli errori.**
L'espressione ottenuta è però funzione degli "errori veri" che, come si è detto, non si conoscono. Se il numero delle determinazioni *n* è abbastanza grande, in pratica si usa un'altra espressione, funzione degli scarti v_i (errori apparenti):

$$m = \pm \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ldots + v_n^2}{n-1}}$$

---

[1] o **deviazione standard** (*standar deviation*); nella testi internazionali viene convenzionalmente indicata con il simbolo σ (sigma)

Applicando quest'ultima formula otteniamo quello che più correttamente può essere definito **scarto quadratico medio (s.q.m.)**; tale valore sarà maggiore di quello dato dalla formula per l'errore quadratico medio. Gli errori apparenti sono infatti ottenuti come differenze fra i risultati delle misure e il valore più conveniente, che é da considerare un pò differente dal valore vero. Per *n* abbastanza grande, le due formule praticamente si equivalgono.

FREQUENZA DEGLI ERRORI

Se di un sistema: di osservazioni effettuate si conosce la precisione h, si può tracciare il diagramma della funzione

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

relativo a quel sistema; questo fornisce la curva di frequenza teorica relativa al sistema. D'altro canto, calcolati il valore più conveniente e gli errori apparenti, si può costruire il diagramma. effettivo relativo al sistema di osservazioni in esame. Per confronto dei diagrammi sì può vedere quanto il sistema stesso si avvicini a quello teorico: si può, cioè, vedere per <u>via grafica</u> in quale misura il sistema di osservazioni effettuato segue la legge di Gauss.
Lo stesso risultato può essere conseguito anche per <u>via analitica</u>, cioè confrontare la frequenza effettiva di un sistema di misure con quella teorica.
Se eseguiamo l'integrale della funzione di Gauss tra i limiti $+m$ e $-m$ otteniamo la probabilità che uno scarto qualsiasi, ottenuto dall'esperienza, sia compreso entro detti limiti.
Tale probabilità, indipendente da h, è sempre uguale a 0,683, ciò significa che, qualsiasi sia la serie di osservazioni (caratterizzata dal parametro h), la probabilità che uno scarto qualsiasi, preso ad arbitrio tra quelli calcolati, cada nell'intervallo detto è sempre del 68,3%.
Per meglio chiarire: al variare della serie di osservazioni l'intervallo $\pm m$ varierà, aumentando per serie meno precise e diminuendo per quelle più precise, mentre il parametro *h* diminuirà per serie meno precise ed aumenterà per serie più precise: si otterranno cioè curve a campana più o meno schiacciate sull'asse delle ascisse, ma l'area sottesa dalla curva e l'asse delle ascisse entro i limiti $\pm m$ sarà sempre uguale a *0,683*
L'importanza pratica dello scarto quadratico medio risiede anche nel fatto che è stato assunto come riferimento per la determinazione del limite massimo del valore degli errori accidentali ammissibili in un insieme di misure della stessa grandezza.
Si dimostra, con sviluppi di calcolo delle probabilità avallati da esperienze pratiche, che se si effettuano 1000 misure omogenee della stessa grandezza dei 1000 errori accidentali si ottiene la seguente distribuzione:

- 683 sono inferiori a m
- 955 sono inferiori a $2m$
- 997 sono inferiori a $3m$

Queste esperienze ci permettono di definire come **<u>tolleranza</u>** (errore temibile) il valore:

$$t = 3m = \pm \frac{3}{h\sqrt{2}}$$

La probabilità che uno scarto qualsiasi, ottenuto dall'esperienza, sia interno all'intervallo $\pm t$ è pari a 0.997 (99.7%). Praticamente la probabilità di ottenere errori esterni all'intervallo $\pm t$ è quasi nulla, si da attribuire a cause probabilmente non accidentali la eventuale presenza di scarti superiori alla tolleranza. In tale evenienze è buona norma eliminare tale valore e calcolare di nuovo la media.
Un sistema di misure pertanto si giudica "accettabile" quando gli errori sono minori, in valore assoluto, di *3m*, "buono" quando tutti gli errori sono contenuti fra *–2m* e *+2m* (probabilità pari al 95.5%).

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

Limitandoci a considerare il caso di misure indirette, non condizionate e omogenee, diremo che per queste vale la seguente **legge di propagazione degli errori** (o della **varianza)** che trova frequenti applicazioni.
Se una grandezza X è combinazione lineare di più altre grandezza X_1, X_2, ……., X_n che seguono la legge di Gauss:

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_nX_n$$

anche la grandezza X segue la legge di Gauss e *il quadrato del suo errore quadratico medio* m_x^2 *(varianza) è combinazione lineare dei quadrati degli errori quadratici medi* $m_1, m_2, \dots\dots, m_n$ *delle grandezze* $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ *fatta con i quadrati dei coefficienti:*

$$m_X^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \dots\dots + a_n^2 m_n^2$$

Diamo una giustificazione non rigorosa della legge. Procederemo per induzione.
Sia una grandezza *X* combinazione lineare a coefficienti costanti di due sole grandezze, X_1, X_2

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

E supponiamo di avere effettuato *r* misure della grandezza X_1, *s* misure della grandezza X_2 e di avere determinato gli errori apparenti rispettivi v_{1i} $(i = 1\ 2, \dots\dots, r)$; v_{2k} $(k = 1, 2, \dots\dots, s)$. Per *X* si avranno *rs* determinazioni e alla generica:

$$X_{ik} = \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2k}$$

competerà l'errore:

$$v_{ik} = \alpha_1 v_{1i} + \alpha_2 v_{2k}$$

L'errore quadratico medio della grandezza X sarà allora:

$$m_X^2 = \frac{\sum (a_1 v_{1_i} + a_2 v_{2k})^2}{rs} = \frac{a_1^2 \sum v_{1i}^2}{rs} + \frac{2a_1 a_2 \sum v_{1i} v_{2k}}{rs} + \frac{a_2^2 \sum v_{2k}^2}{rs}$$

Ma il secondo termine del secondo membro può considerarsi nullo perché, per le leggi di distribuzione degli errori, per ogni errore v_{1i} o v_{2k} vi sarà anche l'errore $-v_{1i}$ e $-v_{2k}$. Associando allora questi quattro errori in tutti i modi, si ottengono i valori: $v_{1i}v_{2k}$, $(-v_{1i})(-v_{2k})$, $v_{1i}(-v_{2k})$, $(-v_{1i})v_{2k}$ la cui somma é zero.

Quanto al primo termine, siccome per ogni indice *i* vanno dati a *k* tutti i valori da 1 ad *s*, ciascuna v_{1i} sarà ripetuta s volte; analogo ragionamento va fatto per il terzo termine, perciò:

$$m_X^2 = \frac{a_1^2 s(v_{11}^2 + v_{12}^2 + \ldots\ldots + v_{1r}^2)}{rs} + \frac{a_2^2 r(v_{21}^2 + v_{22}^2 + \ldots\ldots + v_{2s}^2)}{rs} = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2$$

Dunque, la legge di propagazione vale se la grandezza *X* é combinazione lineare di due grandezze.
Supposto allora, che la legge sia valida per una grandezza combinazione lineare di *n-1* altre, si ricava facilmente che lo é per una grandezza combinazione di *n* altre.

ERRORE MEDIO DELLA MEDIA

Ad esempio, si voglia calcolare l'errore medio m_0 della medie di n determinazioni $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ di una grandezza. Tale media e data dalla formula:

$$X_o = \frac{X1 + X2 + \cdots + Xn}{n}$$

cioé:

$$X_0 = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n} X_n$$

Sia *m* l'errore medio del sistema di determinazioni $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$. Esso si può considerare come errore medio di ciascuna delle determinazioni *Xi*, ed allora, applicando la legge di propagazione degli errori, si ha, per l'errore medio M_0 della media:

$$M_0^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2} m_n^2$$

se consideriamo $m_1 = m_2 = \ldots.. = m_n$ si ha

$$M_0^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2} m_n^2 = \frac{n}{n^2} m^2 = \frac{m^2}{n}$$

cioè

$$M_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

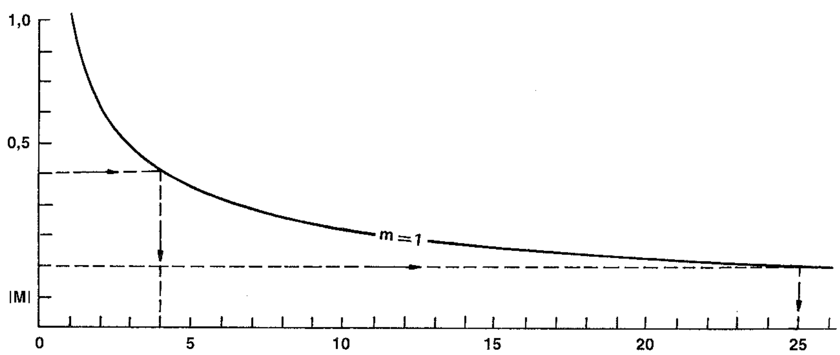
Vale a dire: mentre ciascuna delle determinazioni *Xi* si può considerare errata, in più od in meno, di *m*, la media aritmetica si può considerare errata di M_0. Si scrive allora che il valore della grandezza misurata é

$$X = X_0 \pm M_0$$

intendendo che il valore più conveniente ottenuto dalle misure é X_0 e si può ritenere che si scosti dal valore vero, in più o in meno, al massimo di M_0.
Da notare che l'applicazione fatta della teoria al calcolo dell'errore medio della media non è perfetta, e ciò perché si è considerato l'errore medio di ciascuna delle n determinazioni $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ che é stata effettuata una sola volta. L'applicazione potrebbe considerarsi giusta se le misure $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ fossero ciascuna la media di n determinazioni, e tutti i sistemi fossero eseguiti con la stessa precisione ed avessero uguale errore medio.
La formula è però accettata nella pratica e fa notare che non c'è convenienza ad eseguire un numero molto grande di osservazioni, perché il vantaggio che se ne otterrebbe dapprima cresce piuttosto rapidamente, poi aumenta molto lentamente, al crescere del numero delle determinazioni. Inoltre é opportuno regolare il numero delle osservazioni in modo che l'errore medio della media non scenda al di sotto dell'ordine di approssimazione col quale si legge allo strumento.
Impiegando uno strumento topografico normalmente siamo in grado di conoscere a priori l'e.q.m. di una misura (errore strumentale).
La formula dell'errore medio della media consente di determinare il numero delle misure che si devono effettuare affinché l'errore medio della media assuma un valore prefissato.

$$n = \frac{m^2}{M_0^2}$$

Non si può pensare di poter aumentare eccessivamente il numero delle misure per ottenere una grandissima precisione. Oltre a considerazioni sulle condizioni operative, la formula dell'errore medio della media evidenzia che l'aumento del numero delle misure ha sempre meno influenza sulla riduzione dell'errore medio della media.
Tale considerazione è evidente guardando l'andamento del grafico della formula dell'errore medio della media calcolato per $m=1$; da tale grafico è possibile ricavare il valore di M_0 in funzione del numero delle misure n (o viceversa).



CASO DI UNA GRANDEZZA FUNZIONE QUALUNQUE DI ALTRE DIRETTAMENTE MISURABILI

Nel caso in cui la grandezza X da misurare sia funzione qualunque, anziché combinazione lineare a coefficienti costanti, di altre grandezze $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ direttamente misurabili

$$X = f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$$

la legge di propagazione degli errori si può applicare nella forma sopra vista sotto le ipotesi che la funzione *f* ammetta derivate seconde continue e che gli errori v_i da cui sono affette le misure delle grandezze X_i si possano ritenere piccoli del primo ordine, cioè si possano trascurare i termini dell'ordine dei loro quadrati e dei loro prodotti due a due.

Basterà sviluppare la funzione *f* con la formula di Taylor, scegliendo come punto iniziale una delle determinazioni $X°_1, X°_2, \ldots\ldots, X°_n$ delle grandezze $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ e come incrementi gli errori $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ da cui sono affette $X°_1, X°_2, \ldots\ldots, X°_n$ perché, risultando trascurabili tutti i termini da quelli del secondo ordine in poi per la seconda delle ipotesi precedenti, si sia ricondotti al caso della funzione lineare.

Infatti, con le notazioni adottate, saranno $v_i = X°_i - X_i$ gli errori delle singole, determinazioni e

$$v = X° - X = f(X°_1, X°_2, \ldots\ldots, X°_n) - f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$$

l'errore sulla determinazione X°.
Si ha allora, sviluppando con la formula di Taylor:

$$v = X° - X = f(X°_1, X°_2, \ldots\ldots, X°_n) - f(X°_1 - v_1, X°_2 - v_2, \ldots\ldots, X°_n - v_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0 v_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0 v_n$$

dove si sono trascurati i termini da quelli del secondo ordine in poi nelle v_i e $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$ è la derivata parziale della funzione *f* rispetto alla variabile *Xi* calcolata nel punto iniziale, cioè una costante.
Ci si é dunque riportati al caso precedente, e si può scriverei per l'errore medio da cui è affetta la grandezza *X*:

$$m_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0^2 m_n^2$$

Questa espressione della legge di propagazione degli errori viene frequentemente applicata quando si ottiene per via indiretta la misura di una grandezza *X* funzione delle misure di altre grandezze *Xi* per studiare le influenze che gli errori commessi nella misura di ciascuna delle grandezze *Xi* hanno sulla misura della grandezza *X*. Si nota, infatti, che l'errore v_i commesso nella misura della grandezza i^{ma} influisce nella valutazione dell'errore *v*, quando coesiste con gli altri errori con il termine

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0 v_i$$

cioè moltiplicato per il coefficiente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$$

Ma se si suppone che tutti gli errori siano nulli, tranne v_i, e si ripete il ragionamento fatto nella ipotesi che fossero presenti tutti gli errori, si giunge alla conclusione che:

$$v = \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0 v_i$$

sempre nella approssimazione stabilita. Cioè, l'influenza dell'errore commesso nella misura di una delle grandezze *Xi* sulle misura della grandezza *X* é indipendente dalla coesistenza con gli altri errori (**<u>legge di indipendenza delle piccole cause di errore</u>**).
Si potrà allora esaminare, volta per volta, il termine e valutare come ciascun errore influisce sulla misura effettuata, traendone dei criteri circa l'approssimazione con la quale va condotta ciascuna delle misure dirette affinché l'errore nella misura della grandezza *X* sia contenuto in limiti prefissati.

SISTEMI DI MISURE DI PRECISIONE DIVERSA

Si abbia un sistema. di determinazioni $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ di precisione h e moltiplichiamo i rispettivi errori apparenti $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ per la precisione del sistema. Si otterranno *n* numeri $hv_1, hv_2, \ldots\ldots, hv_n$ che si chiamano **<u>errori ridotti</u>**.
Ammettendo che esista un sistema di misure cui competono questi errori, valutiamo la precisione di questo sistema fittizio. L'errore quadratico medio é, per esso:

$$m_* = \pm\sqrt{h^2 \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}} = hm$$

quindi la precisione:

$$h_* = \frac{1}{m_*\sqrt{2}} = \frac{1}{hm\sqrt{2}} = 1$$

<u>Gli errori ridotti si possono pensare relativi ad un sistema di misure di precisione 1</u>. Per trattare sistemi di misure di una stessa grandezza aventi precisione diversa, si utilizza questo risultato considerando gli errori ridotti di ciascuno dei sistemi dati, errori che possono ritenersi tutti appartenenti a sistemi di precisione 1, aventi cioè la stessa precisione, e si stabilisce di prendere come valore più conveniente ξ_0 della misura della grandezza quel valore che rende minima la somma dei quadrati degli errori ridotti.
Se $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ sono *n* determinazioni di precisione diversa, ed $h_1, h_2, \ldots h_n$ le rispettive precisioni, il valore più conveniente ξ_0 si otterrà rendendo minima la funzione:

$$f(\xi) = h_1^2(\xi_1 - \xi)^2 + h_2^2(\xi_2 - \xi)^2 + \ldots\ldots + h_n^2(\xi_n - \xi)^2$$

Si avrà, successivamente:

$$-2\left[h_1^2(\xi_1 - \xi)^2 + h_2^2(\xi_2 - \xi)^2 + \ldots\ldots + h_n^2(\xi_n - \xi)^2\right] = 0$$

$$\xi_0 = \frac{h_1^2\xi_1 + h_2^2\xi_2 + ... + h_n^2\xi_n}{h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2} = \frac{\frac{1}{m_1^2}\xi_1 + \frac{1}{m_2^2}\xi_2 + ... + \frac{1}{m_n^2}\xi_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + ... + \frac{1}{m_n^2}} = \frac{\frac{\rho}{m_1^2}\xi_1 + \frac{\rho}{m_2^2}\xi_2 + ... + \frac{\rho}{m_n^2}\xi n}{\frac{\rho}{m_1^2} + \frac{\rho}{m_2^2} + ... + \frac{\rho}{m_n^2}}$$

dove ρ é una costante arbitraria. Poniamo:

$$p_i = \frac{\rho}{m_i^2}$$

Risulterà, sostituendo:

$$\xi_0 = \frac{\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \cdots + \xi_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

Il numero p_i si dice **peso del sistema** di osservazione e il valore ξ_0 **media ponderata** dei valori ξ_1, ξ_2, ………., ξ_n affetti dai pesi p_1, p_2, ……p_n.
Conviene notare che, in base alla definizione di peso, influiscono maggiormente sul valore della media ponderata i sistemi che hanno peso maggiore, cioè errore quadratico medio minore.
Quanto alla costante arbitraria ρ, si sceglie in genere un valore tale che i pesi risultino tutti numeri interi; oppure il quadrato dell'errore medio di uno dei sistemi di misura, e allora in questo caso il sistema assume peso 1.
Osserviamo anche che la relazione

$$f(\xi) = h_1^2(\xi_1 - \xi)^2 + h_2^2(\xi_2 - \xi)^2 + ... + h_n^2(\xi_n - \xi)^2$$

si può scrivere, a meno di un fattore di proporzionalità:

$$f(\xi) = p_1(\xi_1 - \xi)^2 + p_2(\xi_2 - \xi)^2 + ... + p_n(\xi_n - \xi)^2$$

e il principio dei minimi quadrati può enunciarsi, per questo caso: **il valore più conveniente di una grandezza della quale si abbiano più misure di precisione diversa, è quello che rende minima la somma dei prodotti dei quadrati dei singoli errori per i rispettivi pesi.**

ERRORE MEDIO E PESO DELLA MEDIA PONDERATA

Possiamo valutare l'errore quadratico medio della media ponderata ξ_0 analogamente a quanto fatto per l'errore medio della media aritmetica. Avremo, infatti:

$$m_{\xi_0}^2 = \frac{1}{(p_1 + p_2 + ... + p_n)^2}\left(p_1^2 m_1^2 + p_2^2 m_2^2 + ... + p_n^2 m_n^2\right) = \frac{1}{(p_1 + p_2 + ... + p_n)}\rho(p_1 + p_2 + ... + p_n)$$

ossia:

$$m_{\xi_0}^2 = \frac{\rho}{(p_1 + p_2 + ... + p_n)}$$

nella quale ρ è lo stesso che é stato scelto per la valutazione dei pesi p_i. Possiamo osservare che, posto $\rho = m_0^2$ si ha:

$$p_i = \frac{\rho}{m_i^2} = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

cioè:

$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{\sum p_i}}$$

Questa relazione mostra, per confronto con

$$M_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

che fornisce l'errore medio della media di n determinazioni, che il generico sistema, di determinazioni, avente peso p_i ed errore medio m_i, può considerarsi costituito da più determinazioni fittizie aventi tutte lo stesso errore medio m_0. In conseguenza, gli n sistemi di osservazioni possono considerarsi costituiti da determinazioni aventi tutte lo stesso errore medio m_0 e in numero complessivo di $p_1 + p_2 + ... + p_n$. Il particolare m_0 scelto si chiama **<u>errore quadratico medio della unità di peso</u>**. Per esso, partendo dalla osservazione che gli errori che si considerano sono quelli apparenti e non quelli veri, si può ottenere che

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{n-1}}$$

da cui si ottiene la formula

$$m_{\xi_0} = \pm \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{(n-1)\sum p_i}}$$

la quale consente di valutare l'errore medio della media ponderata di n sistemi di determinazioni quando si conoscano i pesi dei singoli sistemi e gli errori apparenti v_i.
Il peso della media ponderata sarà quindi <u>la somma dei pesi delle singole determinazioni:</u>

$$p_0 = \frac{\rho}{m_\xi^2} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

PRECISIONE CONSEGUIBILE NELLE MISURE

Vediamo ora come si possa preventivamente valutare la precisione con la quale è da attendersi di effettuare una misurazione adoperando un determinato strumento.
Si debba effettuare la misurazione di una grandezza *X* e si considerino le operazioni elementari alle quali tale misurazione può ricondursi. Il valore che si determina per la grandezza *X* dipende da quelli ottenuti in tali operazioni e se possiamo determinare con osservazioni preliminari, effettuate in laboratorio, gli errori medi delle singole operazioni elementari, si potrà valutare l'errore da cui può essere affetta la misura di *X* applicando la legge di propagazione.
Consideriamo il caso, semplice e abbastanza frequente, in cui la grandezza da determinare sia somma algebrica di più altre direttamente misurabili:

$$X=X_1+X_2+\ldots..+X_n$$

Applicando la legge di propagazione della varianza

$$m_X^2=m_1^2+m_2^2+\ldots\ldots..+m_n^2$$

cioè:

$$m_X=\sqrt{m_1^2+m_2^2+\ldots\ldots..+m_n^2}$$

e quando possono considerarsi uguali gli errori medi delle grandezze misurate direttamente:

$$m_x=\sqrt{nm^2}=m\sqrt{n}$$

Nel caso particolare di n=2 le formule precedenti diventano:

$$m_x=\sqrt{m_1^2+m_2^2}$$

$$m_x=m\sqrt{2}$$

Si noti che in ciascuna di queste relazioni basta poter calcolare tutti gli errori medi che vi compaiono meno uno, perché la formula faccia ricavare quello incognito.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Le conclusioni cui siamo finora pervenuti possono così riassumersi:

1) Come valore più conveniente di una grandezza della quale si siano eseguite *n* determinazioni omogenee si sceglie la media aritmetica;

2) L'errore da cui può considerarsi affetto il valore più conveniente (cioè l'approssimazione che si è conseguita) è l'errore medio della medi;

3) Il sistema di misure è da considerarsi accettabile se le misure sono numerose e gli errori apparenti risultano tutti minori della tolleranza (< 3m);

4) Se le misure eseguite sono di precisione diversa il valore da assumere come più conveniente è la media ponderata dei valori ottenuti;

5) Se la misura indiretta di una grandezza X si ottiene come funzione di più grandezze X_i direttamente misurabili, si può valutare l'errore medio da cui è affetta la determinazione della grandezza X in funzione degli errori medi delle grandezze X_i misurate direttamente (legge di propagazione della varianza)

6) Calcolato l'errore medio m da cui è affetta la determinazione di una grandezza (eseguita con un certo strumento e con un certo metodo) la tolleranza è *3m*, cioè quando si eseguono 2 misure di quella grandezza le misure sono accettabili se la loro differenza non supera *3m*

7) La legge di propagazione degli errori può consentire di far determinare la precisione con cui vanno eseguite le misure delle grandezze direttamente misurabili per ottenere la grandezza che si misura indirettamente con una precisione prefissata.