UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"

- Domande a risposta aperta -

CTF

Matematica

Codice Compito: - Numero d'Ordine

- **D. 1** Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta' a) e' definita in tutto R, b) f(0) = -2, f(1) = 0, f(-1) = 1, c) f'(0) = 0, f'(1) = 1, f'(-1) = -1, d) f''(x) < 0 per x > 1 e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e' uguale a 3.
- **D. 2** Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta' a) e' definita in tutto R, b) f(0) = 1, f(2) = -1, f(-2) = 0, c) f'(0) = 0, f'(2) = -1/2, f'(-2) = 1, d) f''(x) > 0 per x < -2 e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e' uguale a -2.
- **D. 3** Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta' a) e' definita in tutto R, b) f(0) = 0, f(2) = -1, f(-2) = 2, c) f'(0) = -1, f'(2) = 0, f'(-2) = -1/2, d) f''(x) < 0 per x < 0 e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e' uguale a 3.
- **D. 4** Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta' a) e' definita in tutto R, b) f(0) = 1, f(1) = 1/2, f(-1) = 2, c) f'(0) = -1, f'(1) = -1/2, f'(-1) = 0, d) f''(x) > 0 per x > 0 e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e' uguale a f''(x) = 0.
- D. 5 Una scatola cubica di lato x (in cm) contiene uno strato di 2 cm di polistirolo, sul quale vengono poste delle perline (assimilabili ad un liquido). Ci sono valori di x per cui la scatola puo' contenere 270cm³ di perline? Si analizzi l'andamento della funzione che lega il lato della scatola al volume occupato dalle perline.
- D. 6 Una pianta di geranio si puo' triplicare, per talea, alla fine di ogni anno di vita. In tale caso, partendo da una situazione iniziale con N piante di gerani, dopo quanti anni il numero delle piante sara' oltre 200 volte quello iniziale? (si suppongono condizioni tali da avere una mortalita' delle piante ininfluente). Si tracci uno schema grafico che illustri la situazione. Se la riproduzione fosse esprimibile con una funzione continua, dopo quanto tempo il numero delle piante sarebbe esattamente 200 volte quello iniziale?
 D. 16
- D. 7 Una pianta di geranio si puo' duplicare, per talea, alla fine di ogni anno di vita. In tale caso, partendo da una situazione iniziale con N piante di gerani, dopo quanti anni il numero delle piante sara' oltre 100 volte quello iniziale? (si suppongono condizioni tali da avere una mortalita' delle piante ininfluente). Si tracci uno schema grafico che illustri la situazione. Se la riproduzione fosse esprimibile con una funzione continua, dopo quanto tempo il numero delle piante sarebbe esattamente 100 volte quello iniziale?
- **D. 8** In un campo sono piantati 30 meli, ciascuno dei quali produce mediamente 400 mele all'anno. Per

- ogni ulteriore albero che si pianta si reputa che il numero delle mele prodotte da ciascun melo diminuisca di 10. Quanti meli occorre piantare affinche' il raccolto annuo previsto sia massimo? Si discuta il significato dell'andamento della curva che descrive il problema.
- D. 9 Si scriva una matrice 4x4, con tutti gli elementi diversi da zero, il cui determinante sia uguale a zero. Sia data una matrice A il cui determinante sia uguale a 1/2. E' possibile costruire una matrice B, con gli stessi elementi della matrice A (non nello stesso ordine), il cui determinante sia -1/2?
- D. 10 Si scriva una matrice 4x4, con tutti gli elementi diversi da zero, il cui determinante sia uguale a zero. Sia data una matrice A il cui determinante sia uguale a 1/3. E' possibile costruire una matrice B, con gli stessi elementi della matrice A (non nello stesso ordine), il cui determinante sia -1/3?
- D. 11 Sono dati i tre vertici di un triangolo A(-4; 4), B(0; 5), C(1; 0). L'angolo in B e' acuto, ottuso o retto? Illustrare il metodo usato per rispondere alla domanda
- D. 12 Sono dati i tre vertici di un triangolo A(-4; 4), B(0; 5),C(1; 2). L'angolo in B e' acuto, ottuso o retto? Illustrare il metodo usato per rispondere alla domanda.
- D. 13 Sono dati i tre vertici di un triangolo A(1; 1), B(5; -1), C(8; 4). L'angolo in B e' acuto, ottuso o retto? Illustrare il metodo usato per rispondere alla domanda.
- D. 14 Sono dati i tre vertici di un triangolo A(2; 1), B(5; -1), C(8; 4). L'angolo in B e' acuto, ottuso o retto? Illustrare il metodo usato per rispondere alla domanda.
- D. 15 Sono dati i tre vertici di un triangolo A(-1; 4), B(3; 2), C(6; 9). L'angolo in B e' acuto, ottuso o retto? Illustrare il metodo usato per rispondere alla domanda.
- D. 16 In un rettangolo un lato e' x, l'altro e' 2x; si vuole costruire un altro rettangolo che abbia la stessa area del precedente e lato uguale a 2x + 3. Si studi la funzione che fornisce l'altezza y del nuovo rettangolo al variare di x e se ne tracci il grafico. L'altezza e' sempre definita? Per quali valori di x l'altezza assume valore massimo? Il lato x puo' tendere all'infinito?
- D. 17 Dato un quadrato di lato 2x, si vuole costruire un rettangolo che abbia la stessa area del quadrato e lato uguale a 2x + 1. Si studi la funzione che fornisce l'altezza y del rettangolo al variare di x e se ne tracci il grafico. L'altezza e' sempre definita? Per quali valori di x l'altezza assume valore massimo? Il lato x puo' tendere all'infinito?

- **D. 18** Dato un quadrato di lato x/2, si vuole costruire un rettangolo che abbia la stessa area del quadrato e lato uguale a 4x + 3. Si studi la funzione che fornisce l'altezza y del rettangolo al variare di x e se ne tracci il grafico. L'altezza e' sempre definita? Per quali valori di x l'altezza assume valore massimo? Il lato x puo' tendere all'infinito?
- **D. 19** In un rettangolo un lato e' x, l'altro e' 3x; si vuole costruire un altro rettangolo che abbia la stessa area del precedente e lato uguale a 3x + 2. Si studi la funzione che fornisce l'altezza y del rettangolo al variare di x e se ne tracci il grafico. L'altezza e' sempre definita? Per quali valori di x l'altezza assume valore massimo? Il lato x puo' tendere D. 25 all'infinito?
- D. 20 Si deve organizzare la distribuzione di un prodotto in alcune zone. Si possono scegliere tre possibilita': - una ditta A che chiede come retribuzione il 25% del ricavo lordo; - una ditta B che chiede come retribuzione il 9% del ricavo lordo, ma vuole anche 10000 Euro per spese di magazzino; - una ditta C che chiede il 6% e vuole 15000 euro per spese di magazzino. Complessivamente si ha un ricavo che e' al massimo di 100000 euro. Si discuta la scelta fra le varie ditte in funzione del possibile ricavo. Una quarta ditta D vuole battere la concorrenza in ogni caso. Che offerta deve fare in modo da massimizzare il proprio guadagno?
- **D. 21** Si deve organizzare la distribuzione di un prodotto in alcune zone. Si possono scegliere tre possibilita': - una ditta A che chiede come retribuzione il D. 27 18% del ricavo lordo; - una ditta B che chiede come retribuzione il 12% del ricavo lordo, ma vuole anche 3000 Euro per spese di magazzino; - una ditta C che chiede il 5% e vuole 6000 euro per spese di magazzino. Complessivamente si ha un ricavo che e' al massimo di 100000 euro. Si discuta la scelta fra le varie ditte in funzione del possibile ricavo. Una quarta ditta D vuole battere la concorrenza in ogni caso. Che offerta deve fare in modo da massimizzare il proprio guadagno?
- **D. 22** Si deve organizzare la distribuzione di un prodotto in alcune zone. Si possono scegliere tre possibilita': - una ditta A che chiede come retribuzione il 20% del ricavo lordo; - una ditta B che chiede come retribuzione il 12% del ricavo lordo, ma vuole anche 5000 Euro per spese di magazzino; - una ditta C che chiede il 3% e vuole 10000 euro per spese di magazzino. Complessivamente si ha un ricavo che e' al massimo di 100000 euro. Si discuta la scelta fra le varie ditte in funzione del possibile ricavo. Una quarta ditta D vuole battere la concorrenza in ogni caso. Che offerta deve fare in modo da massimizzare il proprio guadagno?
- D. 23 Si deve organizzare la distribuzione di un prodotto in alcune zone. Si possono scegliere tre possibilita': - una ditta A che chiede come retribuzione il 18% del ricavo lordo; - una ditta B che chiede come retribuzione il 9% del ricavo lordo, ma vuole **D. 32** A partire dalla funzione $y = \sqrt{x}$ si tracci approssianche 3000 Euro per spese di magazzino; - una ditta C che chiede il 5% e vuole 9000 euro per spese di magazzino. Complessivamente si ha un ricavo che e' al massimo di 100000 euro. Si discuta la

- scelta fra le varie ditte in funzione del possibile ricavo. Una quarta ditta D vuole battere la concorrenza in ogni caso. Che offerta deve fare in modo da massimizzare il proprio guadagno?
- Una certa dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 60g e 80g, e un consumo giornaliero di proteine compreso fra 120g e 150g. L'alimento A contiene il 30% di grassi e il 15% di proteine, e l'alimento B contiene il 20% di grassi e il 50% di proteine. Che quantita' dei due alimenti occorre consumare per rispettare la dieta? Si rappresenti il problema e si fornisca un esempio.
- Una certa dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 100g e 120g, e un consumo giornaliero di carboidrati compreso fra 90g e 110g. L'alimento A contiene il 20% di carboidrati e il 20% di proteine, e l'alimento B contiene il 15% di carboidrati e il 25% di proteine. Che quantita' dei due alimenti occorre consumare per rispettare la dieta? Si rappresenti il problema e si fornisca un esempio.
- D. 26 Una certa dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 60g e 80g, e un consumo giornaliero di proteine compreso fra 120g e 150g. L'alimento A contiene il 40% di grassi e il 15% di proteine, e l'alimento B contiene il 20% di grassi e il 60% di proteine. Che quantita' dei due alimenti occorre consumare per rispettare la dieta? Si rappresenti il problema e si fornisca un esempio.
- Una certa dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 60g e 80g, e un consumo giornaliero di carboidrati compreso fra 90g e 110g. L'alimento A contiene il 30% di grassi e il 20% di carboidrati, e l'alimento B contiene il 15% di grassi e il 60% di carboidrati. Che quantita' dei due alimenti occorre consumare per rispettare la dieta? Si rappresenti il problema e si fornisca un esempio.
- D. 28 A partire dalla funzione y = lnx si tracci approssimativamente il grafico di y = ln(x+2), y = ln(-x), y = ln(2x), $y = ln(x^2)$. Si dica se la funzione y =ln(2x) puo' essere scritta nella forma y = lnx + C.
- Data la funzione $y = x^n$, si dica, nei casi in cui e' n = -2, n = -1, n = 1, n = 2, n = 3 a) quando la funzione e' positiva, b) se possiede massimi o minimi, flessi, asintoti, c) quando e' invertibile (in tal caso indicare la funzione inversa)
- Si trovino opportuni coefficienti a, b, c, d del polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ in modo che la funzione da esso rappresentata abbia un flesso orizzontale nel punto (0, 1) e abbia un solo minimo, nel punto (1, 0).
- A partire dalla funzione $y = e^x$ si tracci approssimativamente il grafico di $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$, $y = e^{2x}$, $y = e^{x^2}$. Si dica se la funzione $y = e^{x+2}$ puo' essere scritta nella forma $y = ae^x$
- mativamente il grafico di $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{4x}$, $y = \sqrt{x^2}$. Si dica se la funzione y = $\sqrt{x+2}$ ammette una funzione inversa, e, se si, quale.

- **D. 33** E' data la funzione polinomiale $y = x^3 + bx^2 + cx + D$. **41** Data la funzione $y = -x\sqrt{1+x}$ d. Si dica quale relazione deve valere fra i coefficienti b e c affinche' essa non ammetta ne' massimo ne' minimo. Data la funzione $y = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, si verifichi che soddisfa la condizione precedente. Determinarne lo zero (cioe' la soluzione dell'e- D. 42 quazione $x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$) approssimato alla prima cifra decimale.
- **D. 34** E' data la funzione y = |3x 1|a) Se ne tracci il grafico, b) Si tracci il grafico e si scriva l'equazione della funzione simmetrica rispetto all'asse y della funzione data, c) Si tracci il grafico e si scriva l'equazione della funzione simmetrica rispetto all'asse x della funzione data.
- **D. 35** Il polinomio $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ tende $a + \infty$ per x che tende $a + \infty$. Ha un flesso orizzontale nel punto (0; 1) e ha un solo minimo, nel punto (-1; 0). a) si tracci un grafico corrispondente alla descrizione data b) anche senza determinare l'equazione del polinomio, e' possibile rispondere alle seguenti domande: - Quali sono le intersezioni del polinomio con l'asse x? - Per quali valori di x il polinomio e' positivo? - A cosa tende il polinomio quando x tende a - ∞? - Ci sono punti di massimo?
- **D. 36** E' data la funzione y = |2x 1|a) Se ne tracci il grafico, b) Si tracci il grafico e si scriva l'equazione della funzione simmetrica rispetto all'asse y della funzione data, c) Si tracci il grafico e si scriva l'equazione della funzione simmetrica rispetto all'asse x della funzione data.
- **D. 37** Il polinomio $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ tende a $+\infty$ per x che tende a -∞. Ha un flesso orizzontale nel punto (0; 1) e ha un solo minimo, nel punto (1; 0). a) si tracci un grafico corrispondente alla descrizione data b) anche senza determinare l'equazione del polinomio, e' possibile rispondere alle seguenti domande: - Quali sono le intersezioni del polinomio con l'asse x? - Per quali valori di x il polinomio e' positivo? - A cosa tende il polinomio quando x tende a -∞? - Ci sono punti di massimo?
- D. 38 Per un certo farmaco le statistiche hanno dimostrato che l'efficacia e' legata all'eta' del paziente da una funzione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, dove x e' l'eta' del paziente e y misura la percentuale di efficacia (ovviamente il valore di y non puo' superare D. 46 1, ossia il 100%). La percentuale e' nulla sia se il paziente e' neonato sia quando l'eta' supera gli 80 anni, cioe' y = 0 per x = 0 e per x = 80. Inoltre si sa che se il paziente ha 20 anni (x = 20) l'efficacia e' del 60% (ovvero y = 0,6). Qual'e' la percentuale massima di efficacia del prodotto?
- D. 39 Si trovino opportuni coefficienti a, b, c, d del poli- D. 48 nomio $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$, in modo che la funzione da esso rappresentata abbia un flesso orizzontale nel punto (0, 1), e abbia un solo minimo, nel punto (-1, 0).
- **D. 40** Data la funzione $y = -x\sqrt{1-x}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Si dica se la funzione ammette asintoti e punti di massimo o di minimo d) Se ne tracci il grafico.

- a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Si dica se la funzione ammette asintoti e punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico.
- Un'industria fabbrica due prodotti A e B che richiedono rispettivamente 40 e 60 MINUTI di macchina e 40 e 30 MINUTI di lavoro manuale. La fabbrica puo' disporre al massimo di 120 OREmacchina e 80 ORE-operaio giornaliere. a) Si descriva la situazione con un sistema di disequazioni e si rappresenti graficamente la parte di piano che rappresenta la quantita' di prodotti che e' possibile produrre giornalmente. b) Determinare la quantita' di prodotti che conviene produrre giornalmente per avere il massimo utile sapendo che la vendita di una unita' A procura un utile di 30 euro e la vendita di un'unita' B procura un utile di 20 euro (Si ricordi che le soluzioni ottimali si trovano nei vertici della regione poligonale individuata in a).
- Un'industria fabbrica due prodotti A e B che richiedono rispettivamente 20 e 30 MINUTI di macchina e 40 e 15 MINUTI di lavoro manuale. La fabbrica puo' disporre al massimo di 120 OREmacchina e 80 ORE-operaio giornaliere. a) Si descriva la situazione con un sistema di disequazioni e si rappresenti graficamente la parte di piano che rappresenta la quantita' di prodotti che e' possibile produrre giornalmente. b) Determinare la quantita' di prodotti che conviene produrre giornalmente per avere il massimo utile sapendo che la vendita di una unita' A procura un utile di 30 euro e la vendita di un'unita' B procura un utile di 20 euro (Si ricordi che le soluzioni ottimali si trovano nei vertici della regione poligonale individuata in a).
- Data la reazione chimica $N_2O_5 + H_2O \longrightarrow HNO_3$ si determini la proporzione fra le molecole impostando l'opportuno sistema e risolvendolo con la regola di Cramer. Si faccia un esempio dei valori che possono assumere le incognite.
- Data la funzione $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 4x + 4}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', in-D. 45 tersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico
- Si scrivano l'equazioni di circonferenze che abbiano in comune con la parabola $y = x^2 + 4x$: 4 punti, 3 punti, 2 punti, 1 punto, 0 punti.
- E' data la funzione $f(x) = Log(x^2 2x + 1)$ D. 47 a) Per quali valori di x e' definita? b) Per quali valori di x e' positiva? Descrivere l'andamento della funzione senza usare le derivate.
- E' data la funzione $f(x) = ln(x^2 4x + 4)$ a) Per quali valori di x e' definita? b) Per quali valori di x e' positiva? Descrivere l'andamento della funzione senza usare le derivate.
- **D. 49** Data la funzione $y = \frac{1}{(cosx-1)^2}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico nell'intervallo $-2\pi < x < 2\pi$

- **D. 50** Data la funzione $y = \frac{x sinx}{x + sinx}$ si studino: la positivita', le intersezioni con gli assi, il limite per x che tende a 0; se ne ipotizzi l'andamento tra 0 e 2π calcolandone alcuni valori (senza far uso delle derivate).
- **D. 51** Data la funzione $y = \frac{1}{(sinx-1)^2}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asiintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico nell'intervallo $-3\pi/2 < x < 5\pi/2$
- **D. 52** Data la funzione $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determinino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico.
- **D. 53** Data la funzione $y = \frac{(x-2)^3}{x^2}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determinino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico.
- **D. 54** Data la funzione $y = \frac{2\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$, si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. Se ne determinino eventuali asintoti e punti di massimo o di minimo. Se ne tracci il grafico.
- **D. 55** Data la funzione $y = \frac{-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. Se ne determinino eventuali asintoti e punti di massimo o di minimo. Se ne tracci il grafico.
- **D. 56** Un oggetto di ottone e' fatto con una lega di rame e zinco. Il peso dell'oggetto e' di 180g, il volume di 22 cm³. Il peso specifico del rame e' di circa 8,9 g/cm³ (approssimabile con 9) e quello dello zinco di 7,14 g/cm³. Qual e' il peso del rame e dello zinco nell'oggetto? Nell'ottone, la quantita' di zinco dovrebbe essere compresa fra il 30% e il 50%. E' rispettata questa condizione?
- D. 57 Un oggetto di ottone e' fatto con una lega di rame e zinco. Il peso dell'oggetto e' di 120g, il volume di 15 cm³. Il peso specifico del rame e' di circa 8,9 g/cm³ (approssimabile con 9) e quello dello zinco di 7,14 g/cm³. Qual e' il peso del rame e dello zinco nell'oggetto? Nell'ottone, la quantita' di zinco dovrebbe essere compresa fra il 30% e il 50%. E' rispettata questa condizione?

- **D. 58** Un oggetto di bronzo e' fatto con una lega di rame e stagno. Il peso dell'oggetto e' di 200g, il volume di 25 cm³. Il peso specifico del rame e' di circa 8,9 g/cm³ (approssimabile con 9) e quello dello stagno di 5,75 g/cm³. Qual e' il peso del rame e dello stagno nell'oggetto? Nel bronzo, la quantita' di stagno dovrebbe essere inferiore al 25%. E' rispettata questa condizione?
- D. 59 Un oggetto di bronzo e' fatto con una lega di rame e stagno. Il peso dell'oggetto e' di 160g, il volume di 20 cm³. Il peso specifico del rame e' di circa 8,9 g/cm³ (approssimabile con 9) e quello dello stagno di 5,75 g/cm³. Qual e' il peso del rame e dello stagno nell'oggetto? Nel bronzo, la quantita' di stagno dovrebbe essere inferiore al 25%. E' rispettata questa condizione?
- **D. 60** E' data la funzione $f(x) = |x^2 5x + 6|$ Se ne tracci il grafico. La funzione e' continua, e' derivabile? Si scrivano le equazioni di rette con la quale la funzione ha rispettivamente: 0, 1, 2, 3, 4 intersezioni
- **D. 61** E' data la funzione $f(x) = |x^2 5x + 4|$ Se ne tracci il grafico. La funzione e' continua, e' derivabile? Si scrivano le equazioni di rette con la quale la funzione ha rispettivamente: 0, 1, 2, 3, 4 intersezioni
- **D. 62** E' data la funzione $f(x) = |x^2 + x 6|$ Se ne tracci il grafico. La funzione e' continua, e' derivabile? Si scrivano le equazioni di rette con la quale la funzione ha rispettivamente: 0, 1, 2, 3, 4 intersezioni
- **D. 63** E' data la funzione $f(x) = |x^2 + 3x 4|$ Se ne tracci il grafico. La funzione e' continua, e' derivabile? Si scriva, se possibile, le equazioni di rette con la quale la funzione ha rispettivamente: 0, 1, 2, 3, 4 intersezioni
- **D. 64** Data la funzione $y = \frac{3(x+1)^2}{x^2-4}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinion gli asintoti (verticali o orizzontali) c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico
- **D. 65** Data la funzione $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}$ a) Si studino: insieme di definizione, positivita', intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico