Analisi Vettoriale aa 2023/24 (lt 30046) – E Montefusco – 20240209

Nome: Cognome:

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

Avvertenze:
La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

Esercizio 1 (punti: 3+2+3).
Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1 + x_2x_3 + x_2 - x_3$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si scriva l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 0, 0)$,
iii. si trovino i punti critici di f *e si determini la loro natura.*

Soluzione. i. La funzione f è una funzione polinomiale definita in tutto lo spazio, in quanto polinomio è continua e derivabile e le sue derivate parziali del primo ordine sono

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4 \qquad \partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + 1 \qquad \partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 1$$

che, in quanto polinomi, sono continue in tutto $\mathbb{R}^3$, allora il teorema del differenziale totale ci permette di affermare che la funzione è differenziabile in tutto lo spazio.
ii. Come visto a lezione, l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(p, f(p))$ è

$$x_4 = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

nel nostro caso vale che $p = (0, 0, 0)$, $f(p) = 0$ e $\nabla f(0, 0, 0) = (4, 1, -1)$, da cui otteniamo

$$x_4 = (4, 1, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2 - x_3$$

iii. I punti critici di f sono i punti $p \in \mathbb{R}^3$ tali che $\nabla f(p) = (0, 0, 0)$, nello specifico dobbiamo studiare il sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4 = 0 \\ \partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + 1 = 0 \\ \partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{la cui soluzione è} \qquad p_c = (-2, 1, -1)$$

Poiché la matrice hessiana di f è

$$Hf(x_1, x_2, x_3) = Hf(p_c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \det[Hf](x) = \det[Hf](p_c) = -2$$

e $\det[Hf]$ vale il prodotto degli autovalori, abbiamo la seguente alternativa: o tutti e tre gli autovalori della matrice hessiana sono negativi o gli autovalori sono uno negativo e due positivi. D'altronde è evidente che

$$Hf(p_c)e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

cioè $2 > 0$ è un autovalore della matrice con autovettore e_1, quindi non è possibile che tutti e tre gli autovalori siano negativi, per cui possiamo affermare con certezza che un solo autovalore è negativo e che gli altri due sono positivi, e questo significa che p_c è un punto di sella. $\square$

Esercizio 2 (punti: 3+3+3). *Data la forma differenziale*

$$\omega(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + \phi(x_3) dx_3 \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in C = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$$

i. per quali funzioni $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ risulta ω chiusa o esatta?
ii. Per quali $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ le primitive di ω sono funzioni armoniche?
iii. Data $\phi(t) = t$ e la curva $\gamma : \{(\cos(t), \sin(t), t), t \in [0, \pi]\}$ si calcoli $\int_\gamma \omega$.

Soluzione. i. Cerchiamo di capire quali funzioni ϕ rendono ω chiusa, controllando che, detti $a_i(x)$ i coefficienti della 1-forma differenziale, cioè $\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3$, valga $\partial_i a_j(x) = \partial_j a_i(x)$ per $i \neq j$. Nello specifico abbiamo

$$\partial_1 a_2(x) = \partial_1 \left[\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right] = -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_2 \left[\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right] = \partial_2 a_1(x)$$
$$\partial_2 a_3(x) = \partial_2 [\phi(x_3)] = 0 = \partial_3 a_2(x) = \partial_3 \left[\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right]$$
$$\partial_3 a_1(x) = \partial_3 \left[\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right] = 0 = \partial_1 [\phi(x_3)] = \partial_1 a_3(x)$$

quindi quanlunque $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ (e in realtà anche meno regolare) rende la forma chiusa!
Discutere l'esattezza di ω richiede del lavoro in più, perché l'aperto C dove la forma è definita non è semplicemente connesso (è tutto lo spazio a cui è stata tolta una retta), quindi la chiusura della forma non implica l'esattezza. Per un corollaro del teorema del rotore (visto a lezione) è sufficiente provare che l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa che circuita la retta $\{x_1 = x_2 = 0\}$ è nullo, per cui scegliamo la circonferenza γ_0 contenuta nel piano $\{x_3 = 0\}$ di centro $O(0, 0, 0)$ e raggio 1 parametrizzata nel seguente modo $x(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, con $t \in [0, 2\pi]$, e abbiamo che

$$\oint_{\gamma_0} \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot (\cos(t)) + \phi(0) \cdot 0 \right] dt = 0$$

ricordando la definizione di integrale di una 1-forma differenziale lungo una curva, in conclusione ω è esatta, oer ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Naturalmente è possibile provare direttamente l'affermazione calcolando una primitiva della forma differenziale, infatti detta $U(x)$ la generica primitiva, integrando le componenti di ω, troviamo che

$$\partial_1 U(x) = a_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{da cui} \qquad U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + c_1(x_2, x_3)$$
$$\partial_2 U(x) = a_2(x) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{da cui} \qquad U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + c_2(x_1, x_3)$$
$$\partial_3 U(x) = a_2(x) = \phi(x_3) \qquad \text{da cui} \qquad U(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} \phi(s) ds + c_3(x_1, x_2)$$

e confrontando le tre diverse rappresentazioni della primitiva U deduciamo che

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \Phi(x_3) + c_0 = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \int_0^{x_3} \phi(s) ds + c_0$$

per il teorema fondamentale del calcolo U è di classe $C^1(C)$, a patto che $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.
ii. Dalla discussione precedente sappiamo che ω è sempre esatta, e abbiamo anche scritto un'espressione della sua generica primitiva, per verificare quando tali primitive sono delle funzioni armoniche è sufficiente calcolare l'operatore di Laplace di U

$$\begin{aligned}
\Delta U(x) &= \partial_{11} U(x_1, x_2, x_3) + \partial_{22} U(x_1, x_2, x_3) + \partial_{33} U(x_1, x_2, x_3) \\
&= \partial_1 a_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_2 a_2(x_1, x_2, x_3) + \partial_3 a_3(x_1, x_2, x_3) \\
&= \partial_1 \left[\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right] + \partial_2 \left[\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right] + \partial_3 \phi(x_3) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \phi'(x_3) = \phi'(x_3)
\end{aligned}$$

Quindi U è una funzione armonica se e solo se $\Delta U(x) = 0$, cioè se e solo se $\phi'(x_3) = 0$, se e solo se $\phi(s) = c_0$, cioè se è una funzione costante, poiché le funzioni aventi derivata nulla su un intervallo sono necessariamente le funzioni costanti, per il teorema del valor medio.
iii. Per calcolare l'integrale richiesto possiamo procedere in due differenti maniere. il primo consiste nell'applicare la definizione di integrale di una forma differenziale $\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3$ lungo una curva regolare γ avente parametrizzazione $x(t)$, per $t \in [a,b]$, come segue

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \Big[a_1(x(t))x_1'(t) + a_2(x(t))x_2'(t) + a_3(x(t))x_3'(t)\Big]dt \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \cdot (\cos(t)) + t \cdot 1\right]dt \\ &= \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

Il secondo metodo consiste nell'uso di una qualsiasi primitiva U, infatti vale

$$\int_\gamma \omega = U(B) - U(A)$$

dove $A = x(a)$ e $B = x(b)$ sono (rispettivamente) il punto iniziale e di finale del supporto della curva, nel nostro caso abbiamo

$$\int_\gamma \omega = U(\cos(\pi), \sin(\pi), \pi) - U(\cos(0), \sin(0), 0) = U(-1,0,\pi) - U(1,0,0) = \frac{\pi^2}{2}$$

visto che

$$U(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) + \int_0^{x_3} s\,ds + c_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) + \frac{x_3}{2} + c_0$$

Concludiamo sottolineando un fatto "ovvio": i due metodi, se correttamente utilizzati, producvono sempre lo stesso risultato! $\square$

Esercizio 3 (punti: 4+5). *Dato $H \in (0,+\infty)$, si consideri il solido E generato dalla rotazione intorno all'asse x_3 della regione piana*

$$S = \left\{0 \le x_1 \le \frac{1}{2}[e^{x_3} + e^{-x_3}], 0 \le x_3 \le H\right\} \subseteq \{x_2 = 0\} \simeq \mathbb{R}^2$$

i. si calcoli $m_3(E)$, cioè il volume del solido,
ii. si scriva una parametrizzazione che renda la superficie laterale del solido una superficie regolare e se ne calcoli l'area.

Soluzione. i. Il metodo (quasi sempre) più semplice per calcolare il volume di un solido di rotazione è quello di integrare per sezioni o, se si preferisce pensare in termini di integrale di Lebesgue, di usare la seguente formula di riduzione legata al teorema di Fubini (anche detto principio di Cavalieri)

$$m_3(E) = \int_0^H m_2(E_s)ds \qquad \text{dove } E_S = E \cap \{x_3 = s\}$$

Per un solido di rotazione la sezione E_s è sempre un cerchio per cui vale

$$m_3(E) = \int_0^H m_2(E_s)ds = \int_0^H \pi|w(s)|^2 ds$$

dove $(x_1(s), x_3(s)) = (w(s), s)$ è la parametrizzazione regolare, nel piano $\{x_2 = 0\}$, della curva che è parte del bordo della regione S che ruotando genera il solido, precisamente il tratto che genera la superficie laterale. Nel nostro caso vale

$$w(s) = \frac{1}{2}\left[e^{s} + e^{-s}\right] = \cosh(s) \qquad \text{con } s \in [0, H]$$

e quindi possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^H \pi \cosh^2(s) ds = \frac{\pi}{4}\int_0^H \left[e^{2s} + 2 + e^{-2s}\right] ds = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2s} + 2s - \frac{1}{2}e^{-2s}\right]_0^H \\ &= \frac{1}{8}\pi\left[e^{2H} + 4H - e^{-2H}\right] \end{aligned}$$

ii. Abbiamo già osservato che $(x_1(s), x_3(s)) = (w(s), s)$ è una parametrizzazione regolare, da tale applicazione possiamo ricavare una parametrizzazione per la superficie laterale nel seguente modo

$$x(\theta, s) = (w(s)\cos(\theta), w(s)\sin(\theta), s) \qquad \text{con } (\theta, s) \in K = [0, 2\pi] \times [0, H]$$

adesso verifichiamo che la coppia (x, K) è una superficie regolare. Cominciamo osservando che le componenti dela paramatrizzazione sono funzioni regolari (cioè almeno di classe C^1) inoltre è possibile verificare che la parametrizzazione è iniettiva sull'interno di K, perché è iniettiva la terza componente e la coppia $(\cos(\theta), sin(\theta))$, sempre ricordando che $w(s) > 0$ per ogni $s \in [0, H]$. A questo punto possiamo calcolare le espressioni dei vettori tangenti e del vettore normale come segue

$$\begin{aligned} &\partial_1 x(\theta, s) = (-w(s)\sin(\theta), w(s)\cos(\theta), 0) \\ &\partial_2 x(\theta, s) = (w'(s)\cos(\theta), w'(s)\sin(\theta), 1) \\ &[\partial_1 x \wedge \partial_2 x](\theta, s) = (w(s)\cos(\theta), w(s)\sin(\theta), -w(s)w'(s)) \\ &\|(\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(\theta, s)\|_2 = |w(s)|\left[1 + |w'(s)|^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

e notiamo che, nei calcoli fatti, è cruciale la positività della funzione w per avere l'esistenza del vettore normale e, in ultima analisi, la regolarità della superficie $\Sigma = x(K)$.
Procediamo con il calcolo del valore dell'area

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_\Sigma d\sigma = \iint_K \|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|_2 \, d\theta ds = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^H w^2(s)\left[1 + |w'(s)|^2\right]^{1/2} ds\right] d\theta \\ &= 2\pi \int_0^H w^2(s)\left[1 + |w'(s)|^2\right]^{1/2} ds = 2\pi \int_0^H \frac{(e^s + e^{-s})^2}{4}\left[1 + \frac{(e^s - e^{-s})^2}{4}\right]^{1/2} ds \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^H \left[e^s + e^{-s}\right]^3 ds = \frac{\pi}{4}\int_0^H \left[e^{3s} + 3e^{s} + 3e^{-s} + e^{-3s}\right] ds \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3s}}{3} + 3e^s - 3e^{-s} - \frac{e^{-3s}}{3}\right]_0^H = \frac{\pi}{12}\left[e^{3H} + 9e^H - 9e^{-H} - e^{-3H}\right] \end{aligned}$$

Si noti che nella prima parte dei calcoli di i e di ii abbiamo evitato di usare l'espressione esplicita della funzione w, in modo da avere delle formule per il calcolo del volume e della superficie laterale per solidi di rotazione. $\square$

Esercizio 4 (punti: 3+3+3).
Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(s) = \dfrac{s}{(2 - u(s))} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

si risponda ai seguenti quesiti esattamente nell'ordine in cui sono proposti
i. si spieghi perché il sistema possiede un'unica soluzione locale,

ii. si calcoli il polinomio di Taylor, di grado 2 con centro $s_0 = 0$, della soluzione,
iii. si ricavi l'espressione esplicita della soluzione.

Soluzione. i. Il problema di Cauchy da studiare riguarda un'equazione differenziale del primo ordine nella seguente forma normale

$$u'(s) = f(s, u(s)) \qquad \text{dove } f(s,z) = \frac{s}{2-z}$$

la funzione f è una funzione razionale (rapporto di polinomi) in due variabili ed è di classe $C^\infty \subseteq C^1 \subseteq C^0$ nel suo dominio massimale che è l'aperto $A = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{2\})$: per quanto visto a lezione sappiamo che la derivabilità nella seconda entrata di f garantisce la locale lipschitzianità della funzione rispetto alla variabile z, e quindi la validità del teorema di Picard e Lindelöff visto che il dato iniziale $(s_0, u_0) = (0, 1) \in A$. E senza alcun timore possiamo affermare l'esistenza di un'unica soluzione (locale) del problema di Cauchy.
ii. Sappiamo che il polinomio di Taylor (di grado 2, centrato in s_0) di una funzione u ha la seguente espressione

$$T_{2,u}(s, s_0) = u(s_0) + u'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}u''(s_0)(s - s_0)^2$$

nel nostro caso specifico abbiamo che

$$s_0 = 0 \qquad u(0) = u_0 = 1 \qquad u'(0) = f(0, u_0) = 0$$

e, per calcolare la derivata seconda, dobbiamo osservare che la soluzione è sufficientemente regolare (perché la sua derivata prima è di classe C^1, in quanto rapporto di funzioni C^1) e, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, vale

$$\begin{aligned}
u''(s) &= \frac{d}{ds}u'(s) = \frac{d}{ds}f(s, u(s)) = \nabla f(s, u(s)) \cdot \frac{d}{ds}(s, u(s)) \\
&= \left(\frac{1}{(2 - u(s))}, \frac{s}{(2 - u(s))^2}\right) \cdot (1, u'(s)) = \frac{1}{(2 - u(s))} + \frac{su'(s)}{(2 - u(s))^2} \\
&= \frac{1}{(2 - u(s))} + \frac{s^2}{(2 - u(s))^3} = \frac{(2 - u(s))^2 + s^2}{(2 - u(s))^3}
\end{aligned}$$

ricordando l'espressione della derivata prima fornitaci dall'equazione differenziale. Per $s = 0$ otteniamo $u''(0) = 1$ da cui

$$T_{2,u}(s, 0) = 1 + \frac{1}{2}s^2$$

Facciamo, per completezza, alcune osservazioni non richieste dal testo delll'esercizio. Innanzitutto notiamo che il punto iniziale da cui "parte" il grafico della soluzione $(0, 1)$ appartiene all'aperto $A_* = \mathbb{R} \times (-\infty, 2)$ (il dominio massimale di f è A che è composto dall'unione di due aperti disgiunti) e il grafico della soluzione del problema di Cauchy sarà interamente contenuta in A_*, cioè nella componente a cui appartiene il punto iniziale. Questa osservazione implica che la quantità $(2 - u(s))$ è positiva per ogni $s \in \mathrm{dom}(u)$, quindi la derivata seconda, la cui espressione abbiamo ottenuto poco sopra, è sempre positiva, cioè u è una funzione convessa. Possiamo inoltre dimostrare che u è una funzione pari, infatti se poniamo $w(s) = u(-s)$ abbiamo che

$$w'(s) = \frac{d}{ds}u(-s) = -u'(-s) = -\frac{-s}{2 - u(-s)} = \frac{s}{2 - w(s)} \qquad \text{e} \qquad w(0) = u(-0) = 1$$

quindi w risolve lo stesso problema di Cauchy di u e l'unicità della soluzione si traduce nel fatto che $u(s) = w(s) = u(-s)$, cioè nella prova che la funzione u è pari.

iii. Per ricavare l'espressione esplicita della soluzione procediamo per separazione di variabili, visto che l'equazione differenziale ce lo permette. Quindi possiamo scrivere

$$(2-u(s))u'(s) = s$$

$$\int_0^t (2-u(s))u'(s)ds = \int_0^t sds = \int_0^t sds = \frac{1}{2}t^2$$

$$\int_0^t (2-u(s))u'(s)ds = \int_{u(0)}^{u(t)} (2-u)du = \left[2u(s) - \frac{1}{2}u^2(s)\right]_{u(0)}^{u(t)} = \left[2u(t) - \frac{1}{2}u^2(t) - 2 + \frac{1}{2}\right]$$

e confrontando le primitive ottenute ricaviamo la relazione

$$u^2(s) - 4u(s) + (3+s^2) = 0$$

da cui possiamo esplicitare la legge della funzione u ottenendo

$$u(s) = 2 \pm \left[4 - (3-s^2)\right]^{1/2}$$

Sappiamo che la soluzione è unica, questo significa che solo una delle due precedenti espressioni è quella che ci interessa, controllando che valga $u(0) = 1$ possiamo identificare l'espressione della soluzione

$$u(s) = 2 - \left[1 - s^2\right]^{1/2}$$

Si noti che è una funzione pari e convessa (come dimostrato poco sopra), inoltre è immediato verificare che $\mathrm{dom}(u) = (-1, 1)$ e che la soluzione non può essere prolungata ulteriormente. □
