ANALISI VETTORIALE per Fisica
– Diario delle lezioni - Settimana n. 5–

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio[1], docente del corso.

Lunedì 27 ottobre 2014 - Venerdì 31 ottobre 2014

- Dimostrazione del Teorema delle funzioni implicite.
- **Proposizione:** Nelle ipotesi del teorema di Dini, se f è di classe C^2, allora anche la funzione esplicitata è di classe C^2, e si ha una formula per la derivata seconda.
- **Osservazione:** Analogamente, se f è di classe C^2, allora anche la funzione esplicitata è di classe C^N, e si ha una formula per la derivata N-esima.
- **Esercizio:** Data l'equazione
$$\frac{\ln x}{\cos y} + \operatorname{tg}^2 y + y(1-\sqrt{x}) = 0\,,$$
mostrare che in un intorno del punto $(1,\pi)$ essa rappresenta il grafico di una funzione di una sola variabile, e trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così individuata in un intorno del punto dato.
- **Esercizio:** Sia
$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1\,.$$
Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutta una semiretta della forma $(-\alpha,+\infty)$, con $\alpha > 0$, una funzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x,\varphi(x)) = 0$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di $\varphi(x)$ con punto iniziale $x_0 = 0$, e calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,.$$
- **Teorema delle funzioni implicite in dimensione** 3 (dimostrazione per esercizio, ottenuta con poche modifiche da quella in dim. 2).
- **Osservazione:** Il teorema delle funzioni implicite fornisce solo delle condizioni sufficienti, non necessarie, per l'esplicitabilità.
- **Esempio:** La funzione $f(x,y) = (y-x^2)^2$ non verifica le ipotesi del teorema del Dini nel punto $(0,0)$, ma ovviamente si esplicita nella forma $y = x^2$.
- **Esercizio:** Mostrare che l'equazione
$$x^2e^z + ze^y + y^2 = 0$$
si esplicita nella forma $z = \varphi(x,y)$ in un intorno di $(0,0,0)$, e trovare $\nabla\varphi(0,0)$.
- **Teorema delle funzioni implicite per un sistema di due equazioni in dimensione** 3**:**
$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
- **Teorema delle funzioni implicite per un sistema di** m **equazioni in** $(n+m)$ **variabili** (s.d).
- **Curve. Equazioni parametriche di una curva. Sostegno della curva.**
- Esempi di curve piane: circonferenze, rette, **curve grafico**.
- Esempi di curve dello spazio: elica cilindrica, elica conica.
- **Curve di classe** C^1**. Vettore velocità e derivata di una funzione a valori vettoriali. Curve regolari.** Significato della regolarità: **versore tangente ad una curva. Curve regolari a tratti.**
- **Esercizio:** verifica della regolarità di $\gamma(t) = (t^2,t^3)$.
- Regolarità di curve grafico.
- **Curve piane in coordinate polari. Curve nella forma** $\rho = \rho(\theta)$**.** Condizione di regolarità per curve della forma $\rho = \rho(\theta)$.
- **Esempio:** cardioide, di equazione in coordinate polari $\rho = 1+\cos\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$.
- **Punto regolare di** f**.**
- **Esempio:** tutti i punti dell'insieme $\{x^2+y^2 = 1\}$ sono regolari.
- **Linee di livello.**
- **Corollario:** Sia $A\subset\mathbb{R}^2$ un aperto, Sia $f(x,y) : A\to\mathbb{R}$ i classe C^1, sia $(x_0,y_0)\in A$ un punto regolare di f; allora in un intorno di (x_0,y_0) la curva di livello di f passante per (x_0,y_0) è il grafico di una funzione di classe C^1, quindi è il sostegno di una curva regolare.
- **Osservazione:** il gradiente è ortogonale alle linee di livello in ogni punto regolare.
- **Esempi:** interpretazione di carte altimetriche o meteorologiche: isoipse e isobare.

---
[1]Con qualche aiuto da:
Mike Keneally - Hat.
Trio Ivoire - Trio Ivoire
Jethro Tull - Living in the Past
Gyorgy Ligeti - The Ligeti Project II

- **Massimi e minimi vincolati** (relativi ed assoluti) in dimensione 2. Posizione del problema.

- **Osservazione:** Come devono essere disposti il gradiente della funzione e la curva in un punto di estremo locale vincolato.

- **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione 2.**

- **Esempio:** Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = 4 - \sqrt{3}x - y$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ (svolto in due modi: parametrizzando la circonferenza oppure mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange).

- **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per un vincolo in dimensione 3. (s.d.)**

- **Esercizio:** Trovare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio che ha volume massimo se l'area della superficie della scatola è 12.