

Nome:

Cognome:

Matricola:

Avvertenze: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza del risultato finale.

Esercizio 1 (punti: 2+2+2+2).

Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$

- i. *si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il piano,*
- ii. *si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1, 1, -2)$,*

iii. *si provi che $\Delta f(x_1, x_2) = 0$*

iv. *si trovi $\max_B(f)$ dove $B = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.*

Soluzione. i. L'espressione della funzione f è un polinomio, quindi si tratta di una funzione continua che ha derivate parziali (di qualsiasi ordine) continue, in quanto anch'esse sono polinomi, infatti vale

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = -6x_1 x_2$$

$$\partial_{11} f(x) = 6x_1 \quad \partial_{12} f(x) = -6x_2 \quad \partial_{22} f(x) = -6x_1$$

$$\partial_{111} f(x) = 6 \quad \partial_{122} f(x) = -6 \quad \text{e} \quad \partial_{ijk} f(x) = 0 \quad \text{per le altre derivate di ordine 3}$$

$$\partial_{ijkp} f(x) = 0 \quad \text{per ogni derivata di ordine 4 (o più)}$$

allora (per il teorema del differenziale totale) la funzione risulta differenziabile in tutto il piano.

ii. È noto dalla teoria che l'equazione del piano tangente al grafico di una funzione f nel punto $(p, f(p))$ è

$$x_3 = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) \quad \text{cioè} \quad x_3 = f(p_1, p_2) + \nabla f(p_1, p_2) \cdot (x_1 - p_1, x_2 - p_2)$$

Nel nostro caso abbiamo che

$$p = (p_1, p_2) = (1, 1) \quad f(p) = f(p_1, p_2) = -2 \quad (p, f(p)) = (1, 1, -2)$$

da cui otteniamo l'equazione del piano tangente

$$x_3 = -2 + (0, -6) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1) = 4 - 6x_2$$

iii. Ricordando la definizione di operatore di Laplace abbiamo che

$$\Delta f(x_1, x_2) = \nabla \cdot \nabla f(x) = \partial_{11} f(x_1, x_2) + \partial_{22} f(x_1, x_2) = 6x_1 - 6x_1 = 0$$

iv. Osseviamo subito che B è chiuso e limitato, quindi compatto, e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \subseteq C^0(B)$, quindi il teorema di Weierstrass prova l'esistenza del massimo e minimo assoluti della funzione ristretta su B . I punti critici liberi di f sono le soluzioni del sistema

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \partial_1 f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0 \\ \partial_2 f(x_1, x_2) = -6x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha il punto $(0, 0)$ come unica soluzione. Soi noti che tale punto è una sella poiché $f(x_1, 0) = x_1^3$ che assume valori positivi e negativi in punti arbitrariamente vicini a O .

Dunque il massimo della funzione deve essere assunto su un punto appartenente alla frontiera di B , ricordando che $\partial B = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ possiamo studiare il problema in due differenti maniere.

Poiché il testo non richiede un metodo in particolare è possibile descrivere ∂B come una curva regolare, semplice e chiusa, tramite la parametrizzazione $(x_1(s), x_2(s)) = (\cos(s), \sin(s))$ con $s \in [0, 2\pi]$, e quindi studiare la funzione che ottiene componendo f con $x(s)$, in modo da avere

$$F(s) = f(x_1(s), x_2(s)) = \cos(s)(\cos^2(s) - 3\sin^2(s)) = 4\cos^3(s) - 3\cos(s) \quad s \in [0, 2\pi]$$

I punti stazionari sono le soluzione dell'equazione

$$F'(s) = -12\sin(s)\cos^2(s) + 3\sin(s) = 3\sin(s)[1 - 4\cos^2(s)] = 0$$

e troviamo i seguenti valori critici del parametro s

$$s_{1,2} = 0, \pi \quad s_{3,4,5,6} = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

da cui ricaviamo i seguenti punti

$$\begin{aligned}
 s_1 = 0 & \quad p_1 = (\cos(s_1), \sin(s_1)) = (1, 0) & e & \quad f(p_1) = 1 \\
 s_2 = \pi & \quad p_2 = (\cos(s_2), \sin(s_2)) = (-1, 0) & e & \quad f(p_2) = -1 \\
 s_3 = \frac{1}{3}\pi & \quad p_3 = (\cos(s_3), \sin(s_3)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & e & \quad f(p_3) = -1 \\
 s_4 = \frac{2}{3}\pi & \quad p_4 = (\cos(s_4), \sin(s_4)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & e & \quad f(p_4) = 1 \\
 s_5 = \frac{4}{3}\pi & \quad p_5 = (\cos(s_5), \sin(s_5)) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & e & \quad f(p_5) = 1 \\
 s_6 = \frac{5}{3}\pi & \quad p_6 = (\cos(s_6), \sin(s_6)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & e & \quad f(p_6) = -1
 \end{aligned}$$

quindi vale che $\max_{B^c}(f) = 1$.

In alternativa possiamo ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange e studiare i punti critici liberi della funzione

$$L(x_1, x_2, c) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + c[x_1^2 + x_2^2 - 1] \quad (x_1, x_2, c) \in \mathbb{R}^3$$

cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 L(x_1, x_2, c) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 2cx_1 = 0 \\ \partial_2 L(x_1, x_2, c) = -6x_1x_2 + 2cx_2 = 2x_2(c - 3x_1) = 0 \\ \partial_3 L(x_1, x_2, c) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda equazione abbiamo che o $x_2 = 0$ o $x_1 = c/3$. Se $x_2 = 0$ otteniamo, dalla terza equazione, che $x_1 = \pm 1$, cioè i punti p_1 e p_2 della precedente discussione. Invece la relazione $x_1 = c/3$, sostituita nella prima equazione ci permette di concludere che $x_2^2 = c^2/3$ e dall'equazione costitutiva del vincolo ricaviamo che $c = \pm 3/2$, da cui otteniamo i punti p_3 , p_4 , p_5 e p_6 .

Riassumendo entrambi i metodi ci portano ad affermare che

$$\max_{x \in B} f(x) = f(1, 0) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

il che conclude lo svolgimento. \square

Esercizio 2 (punti: 2+2+2+2+2). Date le funzioni

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad e \quad f_*(x) := \sin(\pi x) \quad x \in \mathbb{R}$$

si determini, spiegando perché, se le seguenti affermazioni sono vere o false

i. le funzioni f_n sono misurabili per ogni $n \in \mathbb{N}$,

ii. $f_n \rightarrow f_*$ puntualmente in \mathbb{R} ,

iii. $f_n \rightarrow f_*$ uniformemente in \mathbb{R} ,

iv. $f_n \rightarrow f_*$ in $L^2(0, 1)$,

v. $f_n \rightarrow f_*$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. i. Una funzione è misurabile se la controimmagine di un aperto è un insieme misurabile, le funzioni f_n , per ogni $n \in \mathbb{N}$ sono dei polinomi, quindi funzioni continue. Poiché la controimmagine di un aperto, tramite una funzione continua, è un aperto (e gli aperti sono misurabili secondo Lebesgue) possiamo concludere che f_n è una funzione misurabile per ogni n .

ii. La successione $\{f_n\}$ è la successione delle somme parziali di una serie di potenze che possiamo studiare tramite la sostituzione $z = \pi x$, ottenendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

La serie ottenuta ha raggio di convergenza $R = +\infty$ nella variabile z e quindi anche rispetto ad x , per il criterio di Hadamard, inoltre possiamo riconoscere la serie di Taylor della funzione \sin , quindi possiamo affermare

che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sin(z) = \sin(\pi x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

cioè $f_n(x) \rightarrow f_*(x)$ puntualmente in \mathbb{R} .

iii. Il teorema del raggio di convergenza afferma che la convergenza della serie di potenze è (totale ed) uniforme solo sui sottoinsiemi compatti contenuti in $(-R, R)$, quindi nel nostro caso abbiamo convergenza uniforme di f_n a f_* negli intervalli del tipo $[a, b]$, con $-\infty < a < b < +\infty$. Non è possibile avere convergenza uniforme in tutto l'asse reale perché

$$\|f_n - f_*\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_*(x)| = +\infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

questo perché f_* è una funzione limitata mentre f_n è un polinomio, e i polinomi hanno sempre immagine non limitata, infatti vale sempre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$.

iv. Proviamo che l'affermazione è vera in due modi differenti. Dal punto iii sappiamo che $\|f_n - f_*\|_{\infty, [0,1]} \rightarrow 0$, quindi possiamo scrivere che

$$\|f_n - f_*\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f_*(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \|f_n - f_*\|_{\infty, [0,1]}^2 dx = \|f_n - f_*\|_{\infty, [0,1]}^2 \int_0^1 dx = \|f_n - f_*\|_{\infty, [0,1]}^2 \rightarrow 0$$

In alternativa possiamo provare la veridicità dell'affermazione ricorrendo al teorema della convergenza dominata di Lebesgue osservando innanzitutto che $f_n(x) \rightarrow f_*(x)$ puntualmente in $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, per quanto discusso nel punto ii, e quindi segue che

$$g_n(x) = |f_n(x) - f_*(x)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{q.o. in } (0, 1)$$

inoltre la monotonia della potenza (su $[0, +\infty)$) ci permette di ricavare le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_*(x)|^2 &\leq [|f_n(x)| + |f_*(x)|]^2 = \left[\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} \right| + |f_*(x)| \right]^2 \leq \left[\sum_{k=0}^n \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} + 1 \right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} + 1 \right]^2 \leq [\sinh(\pi) + 1]^2 \quad \text{per ogni } x \in [0, 1] \end{aligned}$$

che di danno una funzione costante, quindi appartenente a $L^1(0, 1)$, che controlla la successione $\{g_n\}$ e garantisce l'applicabilità del teorema citato sopra.

v. Il precedente argomento non vale in \mathbb{R} , perché le funzioni costanti e la funzione sinh (che sarebbero le funzioni che compaiono nella generalizzazione delle maggiorazioni precedenti) non sono sommabili in \mathbb{R} , avendo integrale $+\infty$, inoltre (per quanto osservato in iii) è evidente che $f_n \notin L^2(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. \square

Esercizio 3 (punti: 2+2+2). *Dato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(s) = e^{-w^2(s)} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

- i. si spieghi perché esiste un'unica soluzione locale,
- ii. si provi che la soluzione è strettamente crescente,
- iii. si dimostri che la soluzione è una funzione dispari,
- iv. si spieghi perché non è possibile scrivere esplicitamente la soluzione e se ne ricavi il polinomio di Taylor del secondo ordine centrato in 0.

Soluzione. i. Abbiamo a che fare con una equazione differenziale del primo ordine in forma normale a variabili separabili. Il secondo membro dell'equazione è identificato dalla funzione $f(s, z) = e^{-z^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la quale, essendo regolare, è localmente lipschitziana nella seconda variabile, avendo dervata parziale continua (quindi localmente limitata), questo ci permette di applicare il teorema di Picard-Lindelöf e di affermare l'esistenza di un'unica soluzione.

ii. Poiché la funzione esponenziale è strettamente positiva, abbiamo che

$$w'(s) = e^{-w^2(s)} > 0$$

quindi, dal teorema di Lagrange, segue la stretta monotonia della soluzione.

iii. Sappiamo che una funzione è dispari se vale

$$w(s) = -w(-s) \quad \text{per ogni } s$$

posto $u(s) := -w(-s)$, notiamo che

$$u(0) = -w(0) = 0$$

$$u'(s) = \left[-w(-s) \right]' = -w'(-s) \cdot (-1) = w'(-s) = e^{w^2(-s)} = e^{[-w(-s)]^2} = e^{u^2(s)}$$

cioè u risolve lo stesso problema di Cauchy di w ! L'unicità della soluzione implica che

$$u(s) = -w(-s) \equiv w(s) \quad \text{per ogni } s$$

cioè w è una funzione dispari.

iv. Cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy sfruttando il fatto che l'equazione differenziale è a variabili separabili, infatti possiamo scrivere

$$e^{w^2(s)} w'(s) = 1 \quad \text{da cui} \quad \text{Erf}(w(s)) = \int_0^{w(s)} e^{r^2} dr = \int_0^s dt = s$$

e poiché non siamo in grado di scrivere esplicitamente la funzione Erf e tanto meno la sua inversa, non riusciamo ad ottenere un'espressione esplicita della soluzione. Possiamo però ricavare una sua approssimazione nel seguente modo: notiamo che

$$w(0) = 0 \quad \text{e} \quad w'(0) = e^{w^2(0)} = 1$$

$$w''(s) = \left[e^{w^2(s)} \right]' = 2w(s)w'(s)e^{w^2(s)} \quad \text{da cui} \quad w''(0) = 0$$

per cui vale

$$T_{w,2}(s, 0) = w(0) + w'(0)[s - 0] + \frac{1}{2}w''(0)[s - 0]^2 = s$$

che è il polinomio desiderato. \square

Esercizio 4 (punti: 2+2+3).

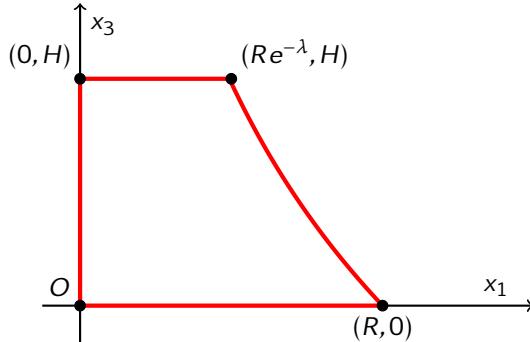
i. Dati $H, R, \lambda > 0$ parametri reali, si calcoli il volume del solido

$$D = \left\{ x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 e^{-2\lambda x_3/H}, 0 \leq x_3 \leq H \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ii. si scriva una parametrizzazione regolare della superficie laterale di D ,

ii. si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x) = (x_1, x_2, 0)$ attraverso la superficie laterale di D ,

Soluzione. i. Il solido D è generato dalla rotazione intorno all'asse x_3 del dominio piano rappresentato di seguito



il calcolo del volume $m_3(D)$ può essere effettuato tramite un integrale triplo (per sezioni o per fili), usando le coordinate cilindriche o il teorema di Guldino.

Integrare per sezioni significa effettuare il seguente calcolo, basato sui teoremi di Fubini e Tonelli,

$$m_3(D) = \int_0^H m_2(D(z)) dz \quad \text{dove} \quad D(z) = D \cap \{x_3 = z\}$$

nel nostro caso abbiamo che $D(z) = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 e^{-2\lambda z/H}\}$ è un cerchio e quindi $m_2(D(z)) = \pi R^2 e^{-2\lambda z/H}$, da cui otteniamo

$$m_3(D) = \int_0^H \pi R^2 e^{-2\lambda z/H} dz = -\frac{\pi R^2 H}{2\lambda} [e^{-2\lambda z/H}]_0^H = \frac{\pi R^2 H}{2\lambda} [1 - e^{-2\lambda}]$$

In alternativa possiamo ricorrere alle coordinate cilindriche per svolgere i seguenti calcoli

$$\begin{aligned} m_3(D) &= \iiint_D 1 dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_D r dr d\theta dz = \int_0^H \left[\int_0^{Re^{-\lambda z/H}} \left[\int_0^{2\pi} r d\theta \right] dr \right] dz \\ &= 2\pi \int_0^H \left[\int_0^{Re^{-\lambda z/H}} r dr \right] dz = \pi \int_0^H R^2 e^{-2\lambda z/H} dz = \frac{\pi R^2 H}{2\lambda} [1 - e^{-2\lambda}] \end{aligned}$$

In questi ragionamenti abbiamo usato il fatto che $\tilde{D} = \{0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq Re^{-\lambda z/H}\}$ è il dominio D visto tramite nello spazio delle coordinate cilindriche, che sono

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det(J)| = r$$

Possiamo notare che il finale dei due calcoli è identico (ovviamente nel risultato, ma anche nello svolgimento).

ii. Proponiamo una parametrizzazione della superficie laterale del solido suggerita dai precedenti calcoli eseguiti con le coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} x(u, w) &= (x_1(u, w), x_2(u, w), x_3(u, w)) = (Re^{-\lambda u/H} \cos(w), Re^{-\lambda u/H} \sin(w), u) \\ \text{con } (u, w) &\in K = [0, H] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Questa parametrizzazione (naturalmente non è l'unica possibile) è composta di funzioni di classe C^∞ , quindi derivabili e differenziabili, K è un rettangolo, quindi la chiusura di un aperto connesso e tale applicazione è iniettiva nell'interno di $K = (0, H) \times (0, 2\pi)$ perché se $(u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$ segue che

$$(Re^{-\lambda u_1/H} \cos(w_1), Re^{-\lambda u_1/H} \sin(w_1), u_1) \neq (Re^{-\lambda u_2/H} \cos(w_2), Re^{-\lambda u_2/H} \sin(w_2), u_2)$$

perché o è differente la terza coordinata dei due punti (cioè $u_1 \neq u_2$), oppure vale $(\cos(w_1), \sin(w_1)) \neq (\cos(w_2), \sin(w_2))$, in quanto l'applicazione $w \mapsto (\cos(w), \sin(w))$ è iniettiva in $(0, 2\pi)$.

Adesso verifichiamo che la parametrizzazione ci permette di parlare di spazio tangente e vettore normale in ogni punto dell'interno di K

$$\begin{aligned} \partial_1 x(u, w) &= \left(-\frac{R\lambda}{H} e^{-\lambda u/H} \cos(w), -\frac{R\lambda}{H} e^{-\lambda u/H} \sin(w), 1 \right) \\ \partial_2 x(u, w) &= \left(-Re^{-\lambda u/H} \sin(w), Re^{-\lambda u/H} \cos(w), 0 \right) \\ [\partial_1 x \wedge \partial_2 x](u, w) &= -Re^{-\lambda u/H} \left(\cos(w), \sin(w), \frac{R\lambda}{H} e^{-\lambda u/H} \right) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

quindi possiamo affermare con sicurezza che la parametrizzazione scritta è una superficie regolare nel senso spiegato a lezione.

iii. L'ultimo quesito contiene un piccolo "tranello" su cui bisogna stare attenti: calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x) = (x_1, x_2, 0)$ attraverso la sola superficie laterale di D sembra suggerire che bisogna effettuare un integrale di superficie (metodo corretto) e che non sia possibile utilizzare il teorema della divergenza, in realtà possiamo procedere in entrambi i modi.

Per usare il teorema della divergenza è sufficiente osservare che il dominio ha bordo regolare a tratti (infatti $\partial D = \Sigma \cup C_1 \cup C_2$ dove Σ è la superficie laterale parametrizzata in ii, mentre C_1 e C_2 sono i due cerchi a quota 0 e H) e che il campo vettoriale è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, per cui possiamo ragionare come segue

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial D}(F) &= \iint_{\partial D} F(x) \cdot n(x) d\sigma = \Phi_\Sigma(F) + \Phi_{C_1}(F) + \Phi_{C_2}(F) \quad \text{e} \quad \Phi_{\partial D}(F) = \iiint_D \text{div}[F](x) dx \\ \text{quindi} \quad \Phi_\Sigma(F) &= \iiint_D \text{div}[F](x) dx - \iint_{C_1} F(x) \cdot n(x) d\sigma - \iint_{C_2} F(x) \cdot n(x) d\sigma \end{aligned}$$

a questo punto è sufficiente osservare che il versore normale ai due cerchi $C_{1,2}$ è $\pm e_3$ e che $F(x) \cdot e_3 = 0$ per poter scrivere che

$$\Phi_{\Sigma}(F) = \iiint_D \operatorname{div}[F](x) dx = 2m_3(D) = \frac{\pi R^2 H}{\lambda} [1 - e^{-2\lambda}]$$

poiché $\operatorname{div}[F](x) = \nabla \cdot F(x) = \partial_1 x_1 + \partial_2 x_2 + \partial_3 0 = 2$.

Volendo calcolare effettivamente l'integrale di flusso abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(F) &= \iint_{\Sigma} F(x) \cdot n(x) d\sigma = \iint_K (x_1(u, w), x_2(u, w), 0) \cdot [\partial_1 x \wedge \partial_2 x](u, w) du dw \\ &= \int_0^H \left[\int_0^{2\pi} -R^2 e^{-2\lambda u/H} dw \right] du = \pi \frac{HR^2}{\lambda} [e^{-2\lambda u/H}]_0^H = \pi \frac{HR^2}{\lambda} [e^{-2\lambda} - 1] \end{aligned}$$

ottenendo lo stesso valore trovato poco sopra, a meno del segno, questo perché la parametrizzazione scritta produce un versore normale entrante rispetto a D , mentre il teorema della divergenza dà sempre il risultato relativo al versore uscente. I due risultati sono entrambi corretti, visto che il testo non richiede nulla sull'orientazione di Σ . \square
