Esame di Meccanica Quantistica, 23/01/2024

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1.

a) Le due particelle si trovano in uno stato della forma

$$\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)[a|1, -1\rangle + b|1, 1\rangle + c|-1, 1\rangle],$$

dove a, b, c sono costanti complesse, la funzione spaziale è normalizzata e soddisfa la condizione $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, gli stati $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ sono autostati di S_{1z} ed S_{2z} con autovalore $\hbar s_{1z}$ e $\hbar s_{2z}$. Si determinino tutti gli stati ψ tali che, in una misura contemporanea di S_{1z} ed S_{2z}, la probabilità di trovare lo stesso valore sia pari a 1/2.

Tra gli stati precedentemente trovati si determini quello per cui il valor medio $\langle\psi|S_{1x}^2 S_{2x}^2|\psi\rangle$ assume il valore massimo possibile.

b) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = H_0 + \frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, H_0 non dipende dagli operatori di spin e $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ è autofunzione di H_0 con autovalore E_0. In una misura di energia al tempo t sull'evoluto dello stato trovato al punto a), quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

c) Si assuma

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + V(r_1, r_2),$$

dove $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ ed r_1, r_2 sono i moduli dei vettori posizione delle due particelle. Si determini $[H, \boldsymbol{J}]$, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.

d) La funzione d'onda spaziale è data da

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N r_1 r_2 e^{-\alpha(r_1^2 + r_2^2)} \sin\theta_1 \sin\theta_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \qquad \alpha > 0,$$

con N costante di normalizzazione. Se si misura al tempo t l'osservabile $\boldsymbol{J}^2$ sull'evoluto dello stato ψ con questa funzione spaziale, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

Esercizio 2. Una particella di massa m è soggetta ad una Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, dove

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}} \qquad \hat{V} = A\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right).$$

a) Determinare i commutatori $[\hat{H}_0, \hat{\mathbf{L}}]$, $[\hat{H}_0, \hat{\mathcal{P}}]$, $[\hat{V}, \hat{\mathbf{L}}]$ e $[\hat{V}, \hat{\mathcal{P}}]$, dove $\hat{\mathbf{L}}$ è l'operatore associato al momento angolare orbitale e $\hat{\mathcal{P}}$ è l'operatore associato all'inversione spaziale (parità).

b) Calcolare al primo ordine in A la correzione all'energia del livello fondamentale di $\hat{H}_0$.

c) Calcolare al primo ordine in A la correzione all'energia del primo livello eccitato di $\hat{H}_0$. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Suggerimento: si determinino le simmetrie di $\hat{V}$ e si identifichino i corrispondenti operatori che commutano con $\hat{V}$; ciò permette di determinare quali elementi della matrice della perturbazione ristretta al sottospazio degenere sono necessariamente nulli

Possono risultare utili le seguenti formule (dove $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}$ è il raggio di Bohr):

$$\begin{aligned} R_{10}(r) &= 2a_0^{-3/2}e^{-\frac{r}{a_0}} \\ R_{20}(r) &= (2a_0)^{-3/2}(2-\tfrac{r}{a_0})e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ R_{21}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ \Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n! \end{aligned}$$