Analisi Vettoriale aa 2023/24 (lt 30046) - E Montefusco - 20240111

Nome: Cognome: Matricola:

Avvertenze: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza del risultato finale.

Esercizio 1 (punti: 3+2+3).
Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u'(x) = u^2(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande esattamente nell'ordine in cui sono proposte:
i. si spieghi perché esiste un'unica soluzione locale,
ii. si provi che dom$(u) \supseteq [0, +\infty)$,
iii. si calcoli l'espressione esplicita della soluzione.

Soluzione. i. Il problema di Cauchy possiede un'unica soluzione locale se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Picard e Lindelöf. Nel caso in esame abbiamo che l'equazione differenziale risulta scritta in forma normale $u'(x) = f(x, u(x))$ dove

$$f(x,s) = \frac{1}{2}\left[s^2 - 1\right] \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \subseteq C^1(\mathbb{R}^2)$$

e siccome f è un polinomio è una funzione regolare, in partciolare derivabile con derivate continue, quindi localmente lipschitziana. Volendo essere molto pignoli possiamo verificare l'ipotesi svolgendo alcuni calcoli in dettaglio, posto $R = [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2] = [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2]$, segue che

$$|f(x,s) - f(x,t)| = \frac{1}{2}\left|s^2 - t^2\right| = \frac{1}{2}|s+t| \cdot |s-t| \le \frac{1}{2} \cdot 2r_2|s-t| = r_2|s-t|$$

il che prova la lipschitzianità della funzione f nel rettangolo R.
ii. Il teorema di Picard e Lindelöf prova l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy in un intervallo $I_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$, dove $\varepsilon = \min\{r_1, r_2/M\}$ e $M = \max_R |f(x,s)|$ e, in generale, non è detto che la soluzione sia prolungabile su tutto l'asse reale o anche solo su una semiretta. L'affermazione ii. segue dai teoremi di esistenza globale della soluzione che illustriamo nel caso particolare in oggetto.
Relativamente al nostro problema di Cauchy possiamo fissare $r_2 = 1$, visto che le funzioni costanti $u^*(x) \equiv 1$ e $u_*(x) \equiv -1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale con dato iniziale $u^*(0) = 1$ e $u_*(0) = -1$ rispettivamente. Quindi (per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy) segue che $-1 < u_0 = 0 < 1$ implica $-1 < u(x) < 1$ per ogni $x \in \text{dom}(u)$, per cui il grafico della soluzione u è contenuto nella striscia orizzontale $S = \{-1 < s < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Notiamo anche che, nel nostro caso, $M = \max_{s \in [-1,1]} |f(x,s)| = 1/2$ e che le ascisse non influenzano il valore di M, le osservazioni fatte implicano che possiamo scegliere $\varepsilon = 2$ e che la soluzione del problema di Cauchy è definita in $[-2, 2]$.
A questo punto possiamo considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} w'(x) = \dfrac{w^2(x) - 1}{2} \\ w(2) = u(2) \end{cases}$$

ripetendo i ragionamenti precedenti possiamo dedurre che esiste un'unica soluzione w definita nell'intervallo $[0, 4]$ che, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, deve coincidere con u in tutto $[0, 2]$ e prolungare la soluzione u nel seguente modo

$$u(x) := \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in [2, 4] \\ u(x) & \text{se } x \in [-2, 2] \end{cases}$$

ripetendo il ragionamento fatto possiamo concludere che dom$(u) = \mathbb{R} \supseteq [0, +\infty)$.
Notiamo anche che, siccome in S vale che $f(x,s) < 0$ e $(x, u(x)) \in S$, allora $u'(x) < 0$ e, per il teorema dell'asintoto, ricaviamo che $u(x) \longrightarrow -1$ per $x \longrightarrow +\infty$ e $u(x) \longrightarrow +1$ per $x \longrightarrow -\infty$.

iii. Poiché l'equazione è a variabili separabili e $u_0 = 0$ non è uno zero della funzione f, possiamo procedere come segue

$$u'(x) = \frac{u^2(x)-1}{2} \qquad \text{equivale a} \qquad \frac{u'(x)}{u^2(x)-1} = \frac{1}{2}$$

calcando le primitive otteniamo

$$\int_0^x \frac{1}{2}\,ds = \frac{1}{2}x$$

$$\int_0^x \frac{u'(s)}{u^2(s)-1}\,ds = \int_{u(0)}^{u(x)} \frac{1}{w^2-1}\,dw = \frac{1}{2}\int_0^{u(x)} \left[\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1}\right] dw = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-u(x)}{u(x)+1}\right)$$

si noti che, nel secondo integrale, abbiamo usato la sostituzione $w = u(s)$ e il fatto che $-1 < u(x) < 1$ per ogni x. A questo punto possiamo procedere con altri calcoli, cercando di esplicitare la funzione u

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-u(x)}{u(x)+1}\right) = \frac{1}{2}x \qquad \text{la funzione logaritmo è invertibile, quindi} \qquad \frac{1-u(x)}{u(x)+1} = e^x$$

$$\text{da cui segue} \qquad 1-u(x) = e^x\,(u(x)+1) \qquad \text{cioè} \qquad u(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$$

l'espressione esplicita della soluzione conclude lo svolgimento. □

Esercizio 2 (punti: 4+4)**.**
Dato $C = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 - x_3^2 \le 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché l'insieme è non vuoto, chiuso e limitato,
ii. usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si identifichino i punti di C che hanno massima e minima distanza da $O = (0,0,0)$*.*

Soluzione. i. Osserviamo subito che C è non vuoto perché contiene qualcosa, per esempio i punti $O = (0,0,0)$, $(0,0,\pm1)$ o anche $(\pm1/4, \pm1/4, \pm1/2)$. Definendo $g(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^4-x_3^2$ possiamo scrivere C come una controimmagine, cioè $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : g(x) \le 0\} = g^{-1}((-\infty,0])$ e siccome $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^0(\mathbb{R}^3)$, essendo un polinomio, e $(-\infty,0] \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme chiuso, possiamo affermare che C è chiuso. Per provare la limitatezza di C possiamo ragionare nel seguente modo

$$x_3^2(x_3^2-1) = x_3^4 - x_3^2 \le x_3^4 - x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = g(x) \le 0 \qquad \text{per ogni } (x_1,x_2,x_3) \in C$$

quindi i punti $x \in C$ hanno la terza componente x_3 tale che $(x_3^2-1) \le 0$, ovvero $-1 \le x_3 \le 1$. A questo punto abbiamo che

$$x_1^2 + x_2^2 \le \max_{x_3\in[-1,1]}(x_3^2 - x_3^4) = \frac{1}{4} \qquad \text{per ogni } (x_1,x_2,x_3) \in C$$

per cui possiamo scrivere che

$$C \subseteq \left\{x_1^2 + x_2^2 \le \frac{1}{4}\right\} \times \{-1 \le x_3 \le 1\} = B\left(O, \frac{1}{2}\right) \times [-1,+1] \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

si noti che

$$C \subseteq K := B\left(O, \frac{1}{2}\right) \times [-1,+1] \subseteq B(O,2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

quindi C è compatto (perché chiuso e limitato) e non vuoto.
ii. Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza del massimo e del minimo della funzione distanza da O per $x \in C$, visto che C è compatto (per quanto osservato in i.) e la funzione distanza continua. Per identificare tali punti possiamo prcedere come segue: prima di tutto osserviamo che è sufficiente studiare la funzione $f(x) = d_2^2(x,O) = \|x-O\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ perché la funzione distanza è non negativa e l'elevamento al quadrato è una funzione strettamente crescente se ristretta su $[0,+\infty)$, in più il quadrato della funzione distanza permette di semplificare alcuni calcoli...
Cominciamo cercando punti critici liberi in C, poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ studiamo l'equazione

$$\nabla f(x) = 2x = 2(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0) = O$$

quindi l'unico punto critico libero di f è l'origine $O \in C$ che è chiaramente un punto di minimo assoluto della funzione, in quanto $f(O) = 0 \le f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

Il massimo deve necessariamente essere realizzato su ∂C, per individuare i punti di massimo (come richiesto dal testo) utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Ricordando che $\partial C = \{g(x) = 0\}$ studiamo i punti critici liberi della funzione

$$L(x_1, x_2, x_3, c) = f(x) - cg(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 - x_3^2\right] \qquad (x, c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

cioè le soluzioni del sistema

$$\nabla L(x, c) = O \qquad \text{o meglio} \qquad \begin{cases} \partial_1 L(x, c) = 2x_1(1 - c) = 0 \\ \partial_2 L(x, c) = 2x_2(1 - c) = 0 \\ \partial_3 L(x, c) = 2x_3 - 2cx_3\left(1 - 2x_3^2\right) = 0 \\ \partial_4 L(x, c) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^4 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni implicano l'alternativa

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad c = 1$$

nel primo caso la quarta equazione fornisce i valori $x_3 = -1, 0, 1$ (il valore di c è ininfluente), mentre nel secondo caso la terza equazione diventa

$$x_3 - x_3\left(1 - 2x_3^2\right) = 2x_3^3 = 0$$

dunque abbiamo individuato i seguenti tre punti critici vincolati

$$O = (0, 0, 0) \qquad A = (0, 0, -1) \qquad B = (0, 0, 1)$$

e, per sostituzione, abbiamo che

$$f(O) = 0 = \min_{x \in C} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(A) = f(B) = 1 = \max_{x \in C} f(x)$$

il che conclude lo svolgimento. $\square$

Esercizio 3 (punti: 3+3+2)**.**
Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si calcoli il vettore $\nabla f(e_k)$ *per* $k = 1, 2, 3$ *e si dica per quali versori* $w \in \mathbb{R}^3$ *si ha* $\partial_w f(e_1) = 0$*,*
iii. si scriva l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico della funzione nel punto $(e_1, f(e_1)) \in \mathbb{R}^4$*.*

Soluzione. i. La funzione f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^3$ per il teorema del differenziale totale: questo perché la funzione è un polinomio, quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^1(\mathbb{R}^3)$, infatti le sue derivate parziali sono

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x_1, x_2, x_3), \partial_2 f(x_1, x_2, x_3), \partial_3 f(x_1, x_2, x_3)) = \left(x_2 + x_), x_1 + x_3, x_1 + x_2\right)$$

che sono funzioni continue in tutto lo spazio.
ii. Ricordando che $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ e la formula precedente otteniamo

$$\nabla f(e_1) = (0, 1, 1) \qquad \nabla f(e_2) = (1, 0, 1) \qquad \nabla f(e_3) = (1, 1, 0)$$

Poiché f è differenziabile abbiamo la seguente relazione $\partial_w f(e_1) = \nabla f(e_1) \cdot w$, da cui ricaviamo

$$\partial_w f(e_1) = (0, 1, 1) \cdot w = (0, 1, 1) \cdot (w_1, w_2, w_3) = w_2 + w_3 = 0$$

quindi i versori $w \in \mathbb{R}^3$ per cui tale prodotto scalare è nullo devono soddisfare la relazione $w_2 + w_3 = 0$, da cui deduciamo che

$$w = \frac{(t, s, -s)}{[t^2 + 2s^2]^{1/2}} \qquad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$$

iii. Per iniziare osserviamo che il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è l'insieme $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, dove $\Gamma = \{y = (x, f(x)) = (x_1, x_2, x_3, f(x))\}$, e poiché (in generale) l'espressione dell'iperpiano tangente è $\{x_4 = T_{1,p}(x)\}$, dove $T_{1,p}$ è il polinomio di Taylor del primo ordine centrato in p, ricordando che $f(e_1) = 0$, otteniamo

$$x_4 = T_{1,e_1}(x) = f(e_1) + \nabla f(e_1) \cdot (x - e_1) = 0 + (0, 1, 1) \cdot (x_1 - 1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

dunque l'equazione richiesta è $\{x_4 = x_2 + x_3\}$. $\square$

Esercizio 4 (punti: 4+5).
i. Data $\psi : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, definita come* $\psi(u,w) = \left(w, e^{-(u+2w)}, u\right)$ *con* $K = [0,1]^2$*, si spieghi perché* (ψ, K) *è una superficie regolare orientabile.*
ii. Dato il campo vettoriale $E(x) = (a, 0, b)$ *si calcoli il flusso* $\Phi_\Sigma(E)$*, usando l'orientazione indotta dalla parametrizzazione, e si trovino i valori dei parametri* $(a, b) \in K$ *che rendano che tale flusso minimo.*

Soluzione. i. Affinché la coppia (ψ, K) sia una superficie orientabile dobbiamo verificare alcuni fatti: innanzitutto notiamo che $K = [0,1]^2$ è un quadrato chiuso, quindi è la chiusura di un aperto semplicemente connesso. L'applicazione ψ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^3$ avente componenti di classe C^∞ ed è iniettiva visto che, confrontando la prima e la terza componente di ψ, vale

$$\psi(u_1, w_1) = \left(w_1, e^{-(u_1+2w_1)}, u_1\right) \neq \left(w_2, e^{-(u_2+2w_2)}, u_2\right) = \psi(u_2, w_2) \qquad \text{sse} \qquad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

I vettori tangenti alla superficie sono

$$\partial_1\psi(u,w) = \left(0, -e^{-(u+2w)}, 1\right) \qquad \text{e} \qquad \partial_2\psi(u,w) = \left(1, -2e^{-(u+2w)}, 0\right)$$

e sono linearmente indipendenti visto che

$$(\partial_1\psi \wedge \partial_2\psi)(u,w) = \left(2e^{-(u+2w)}, 1, e^{-(u+2w)}\right) \neq (0,0,0) \qquad \text{per ogni } (u,w) \in K$$

quindi possiamo concludere che (ψ, K) è una superficie regolare.
Provare l'orientabilità della superficie è molto più delicato, di fatto sappiamo riconoscere una superficie orientabile quando si tratta di una parte di un grafico di una funzione o del bordo di un aperto connesso. Nel caso in esame la nostra superficie è una parte del grafico $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ della funzione $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, definita come $F(x_1, x_2) = e^{-x_1-2x_2}$, su cui agisce l'applicazione lineare (e regolare)

$$(y_1, y_2, y_3) \longmapsto (y_2, y_3, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)^t$$

ii. Poiché la superficie è una parte di un grafico, Σ non può essere una superficie chiusa, cioè il bordo di un aperto connesso, quindi il flusso del campo deve essere calcolato tramite un integrale di superficie, visto che il teorema della divergenza non può essere applicato. Allora, ricordando la definizione di integrale di superficie, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\Phi_E(\Sigma) &= \iint_\Sigma E(x) \cdot n(x) d\sigma = \iint_K (a,0,b) \cdot (\partial_1\psi \wedge \partial_2\psi)(u,w) du dw \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 (a,0,b) \cdot \left(2e^{-(u+2w)}, 1, e^{-(u+2w)}\right) du\right] dw = (2a+b) \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{-(u+2w)} du\right] dw \\
&= (2a+b) \int_0^1 \left[-e^{-(u+2w)}\right]_0^1 dw = (2a+b) \int_0^1 \left[-e^{-(2w+1)} + e^{-2w}\right] dw \\
&= (2a+b)\left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_0^1 e^{-2w} dw = \frac{1}{2}(2a+b)\left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) =: \phi(a,b)
\end{aligned}$$

Essendo tutti i fattori non negativi il flusso è minimo per $a = b = 0$, infatti $\phi(a,b)$ è lineare ed ha gradiente mai nullo

$$\nabla\phi(a,b) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)(2,1) = c(2,1) \qquad \text{con } c > 0$$

quindi il massimo e il minimo (che esistono per il teorema di Weierstrass, poiché K è compatto) sono assunti su ∂K, Ma $\nabla\phi$ non è mai parallelo alla normale a ∂K, cioè ai vettori e_1 o e_2, visto che ∂K è un quadrato con i lati paralleli agli assi coordinati, per cui i punti estremali devono essere i vertici del quadrilatero e, in particolare, $(0,0)$ è il punto di minimo. □