1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \frac{3}{x}}$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x > 0$.

Limiti significativi e asintoti.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; la retta $x = 0$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^4}}}{\cancel{x}} = 1;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\underbrace{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^4}} - 1}_{\simeq \frac{1}{x^4}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ La retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

f è continua nel suo dominio.

Derivata e monotonia

f è derivabile nel suo dominio e $f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^{-2/3}\left(3x^2 - \frac{3}{x^2}\right) = \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^{-2/3} \frac{x^4 - 1}{x^2}$

Per $x > 0$ si ha:

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 1$$

Quindi f è strettamente decrescente in $(0, 1]$

f " " crescente in $[1, +\infty)$

$x = 1$ è punto di minimo relativo stretto.

Derivata seconda e studio della concavità/convessità.

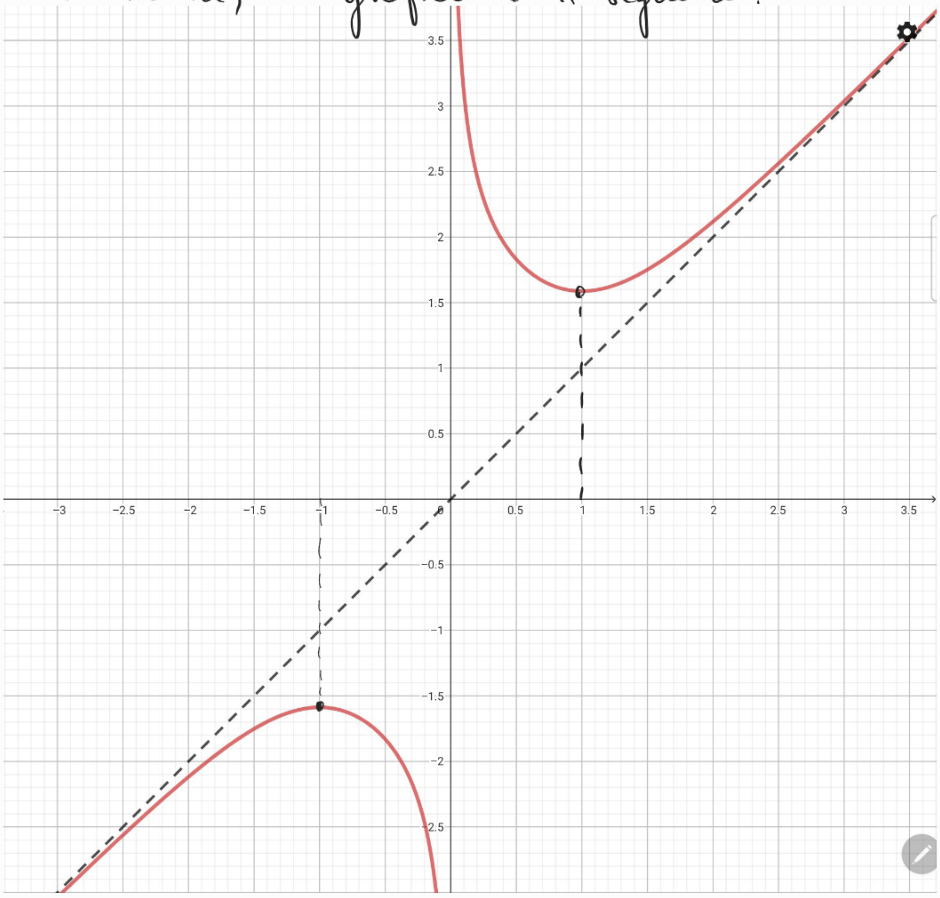
$$f''(x) = -2\left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^{-5/3}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^{-2/3}\left(2x + \frac{2}{x^3}\right) =$$

$$= 2\left(x^3 + \frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\left[-\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x^3}\right)\right] =$$

$$= 2\left(x^3+\frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\left[-\cancel{x^4}-\frac{1}{x^4}+2+\cancel{x^4}+1+3+\frac{3}{x^4}\right]=$$

$$= 4\left(x^3+\frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\left(\frac{1}{x^4}+3\right)>0 \qquad \forall x>0$$

Quindi f è strettamente convessa in $(0,+\infty)$. Tenuto conto della simmetria, il grafico è il seguente:



2. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = 16(2-z)^4 \, .$$

Dividendo per $(2-z)^4$ (che non è nullo in quanto $z=2$ non è soluzione) e ponendo $w = \frac{z}{2-z}$, l'equazione diventa $w^4 = 16$

$$\Rightarrow \quad w_k = 2e^{i k \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow w_0 = 2, \quad w_1 = 2i, \quad w_2 = -2, \quad w_3 = -2i$$

Si tratta ora di trovare z

$$w = \frac{z}{2-z} \Leftrightarrow 2w - zw = z \Leftrightarrow z(1+w) = 2w \Leftrightarrow z = \frac{2w}{1+w}$$

$$z_0 = \frac{4}{3}; \quad z_1 = \frac{4i}{1+2i} = \frac{4i(1-2i)}{5} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i;$$

$$z_2 = 4; \quad z_3 = \frac{-4i}{1-2i} = \frac{-4i(1+2i)}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.$$

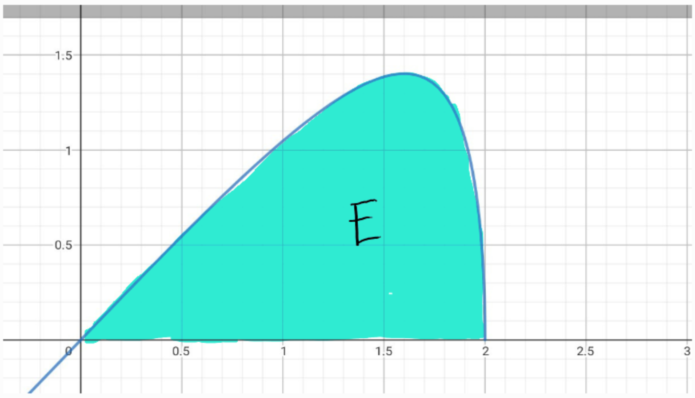
3. Calcolare l'area della regione del primo quadrante del piano cartesiano che si trova al di sotto del grafico di $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{4-x^2}$.

La funzione è definita per $x \in [-2, 2]$.

Per $x \geq 0$ $f(x)$ è sempre ≥ 0, e si annulla solo per $x=0$ e $x=2$.

Vogliamo quindi calcolare l'area di (vedi figura)

$$E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$



$$\text{Area } E = \int_0^2 x \operatorname{arctg} \sqrt{4-x^2}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{sost. } \sqrt{4-x^2} = t \\ x^2 = 4 - t^2 \\ \cancel{2}x\,dx = -\cancel{2}t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right]$$

$$= -\int_2^0 t \operatorname{arctg} t\, dt = \int_0^2 t \operatorname{arctg} t\, dt =$$

[per parti]

$$= \frac{1}{2} t^2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt =$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= 2 \operatorname{arctg} 2 - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{5}{2} \operatorname{arctg} 2 - 1$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{\alpha x + 2}{x} \right)^{x^2} + x^4 \right) e^{-2x} \ (\alpha > 0).$$

$$\sin^2 x - \sin(x^2) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) =$$

$$= \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - (\cancel{x^2} + o(x^4)) =$$

$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim -\frac{x^4}{3} \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi il primo limite vale $-\frac{1}{3}$.

Per il secondo limite, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-2x} = 0 \quad \text{(gerarchia degli infiniti)},$$

quindi basta calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha x + 2}{x}\right)^{x^2} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \log\left(\alpha + \frac{2}{x}\right) - 2x}$$

Ora, $x^2 \log\left(\alpha + \frac{2}{x}\right) - 2x = \begin{cases} x^2(\log\alpha + o(1)) \to +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ x^2(\log\alpha + o(1)) \to -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

Se $\alpha = 1$, allora

$$x^2 \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 2x = x^2\left(\cancel{\frac{2}{x}} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{\frac{2}{x}}\right) = -2 + o(1)$$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

Quindi il limite cercato vale $\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ e^{-2} & \text{se } \alpha = 1. \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

5. a) Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 1$, di

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\,;$$

b) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza (semplice/assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha n^2 + 3n}{n^2+1} \right) - \frac{\pi}{4} \right).$$

a) f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R}$.

$f(1) = 0$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, Quindi

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \quad \text{per} \quad x \to 1 \qquad (*)$$

(infinitesimo di ordine 1)

b) Per $\alpha \neq 1$ si ha

$$\operatorname{arctg} \frac{\alpha n^2 + 3n}{n^2+1} - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{n} \operatorname{arctg} \alpha - \frac{\pi}{4} \neq 0,$$

quindi è violata la C.N. per la convergenza $\Rightarrow$ la serie non converge né semplicemente né assolutamente

<u>Per $\alpha = 1$,</u> si ha

$$a_n := \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{n^2+3n}{n^2+1}}_{\to 1} \Big) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+3n}{n^2+1} - 1 \right) = \frac{1}{2}\,\frac{3n-1}{n^2+1} \sim \frac{3}{2n}$$

Ne segue che, per confronto asintotico con la serie armonica, la nostra serie <u>non</u> converge assolutamente.

Potrebbe convergere semplicemente, verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz.

- $a_n > 0$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$, poiché $\frac{n^2+3n}{n^2+1} > 1$ quindi è una serie a termini di segno alterno
- $a_n \xrightarrow{n} 0$; già visto $\left(a_n \sim \frac{3}{2n} \to 0\right)$.

- a_n def^{te} decrescente.

Poiché arctg x è una funzione crescente, basterà controllare che

$$b_n = \frac{n^2+3n}{n^2+1}$$ è def^{te} decrescente. per $n \to +\infty$

Posto $g(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+1}$, si ha

$$g'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+1)-(x^2+3x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+2x+3x^2+3-\cancel{2x^3}-6x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2} < 0$$ def^{te} per $x \to +\infty$.

Quindi $b_n = g(n)$ è def^{te} decrescente per $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n = \text{arctg}(b_n) - \frac{\pi}{4}$ è def^{te} decrescente.

Quindi la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per $\alpha = 1$.