1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - \frac{3}{x}}$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, limiti significativi, asintoti, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, f è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x>0$.

Limiti significativi e asintoti.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; la retta $x=0$ è asintoto verticale.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^4}}}{\cancel{x}} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(\underbrace{\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^4}} - 1}_{\simeq -\frac{1}{x^4}}\Big) = 0$$

$\Rightarrow$ La retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$

f è continua nel suo dominio.

Derivata e monotonia

Per $x \neq \sqrt[4]{3}$ si ha $f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3-\frac{3}{x}\right)^{-2/3}\left(3x^2+\frac{3}{x^2}\right) = \left(x^3-\frac{3}{x}\right)^{-2/3}\frac{x^4+1}{x^2}$

Poiché f è continua in $x=\sqrt[4]{3}$, e $\lim_{x\to\sqrt[4]{3}} f'(x) = +\infty$, $x=\sqrt[4]{3}$ è un punto di non derivabilità di f (punto a tangente verticale).

$f'(x)>0 \quad \forall x>0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$.

Non ci sono punti di estremo relativo.

Derivata seconda e studio della concavità/convessità.

$$f''(x) = -2\left(x^3-\frac{3}{x}\right)^{-5/3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3-\frac{3}{x}\right)^{-2/3}\left(2x-\frac{2}{x^3}\right) =$$

$$= 2\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\left[-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3-\frac{3}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x^3}\right)\right] =$$

$$= 2\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\left[-\cancel{x^4}-\frac{1}{x^4}-2+\cancel{x^4}-1-3+\frac{3}{x^4}\right]=$$

$$= 4\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)^{-5/3}\frac{1-3x^4}{x^4} \qquad \forall x>0,\ x\neq\sqrt[4]{3}$$

Quindi $f''(x)=0 \iff x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$$f''(x)>0 \iff \frac{1}{\sqrt[4]{3}}<x<\sqrt[4]{3}$$

$$f''(x)<0 \iff \left(0<x<\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\vee\left(x>\sqrt[4]{3}\right)$$

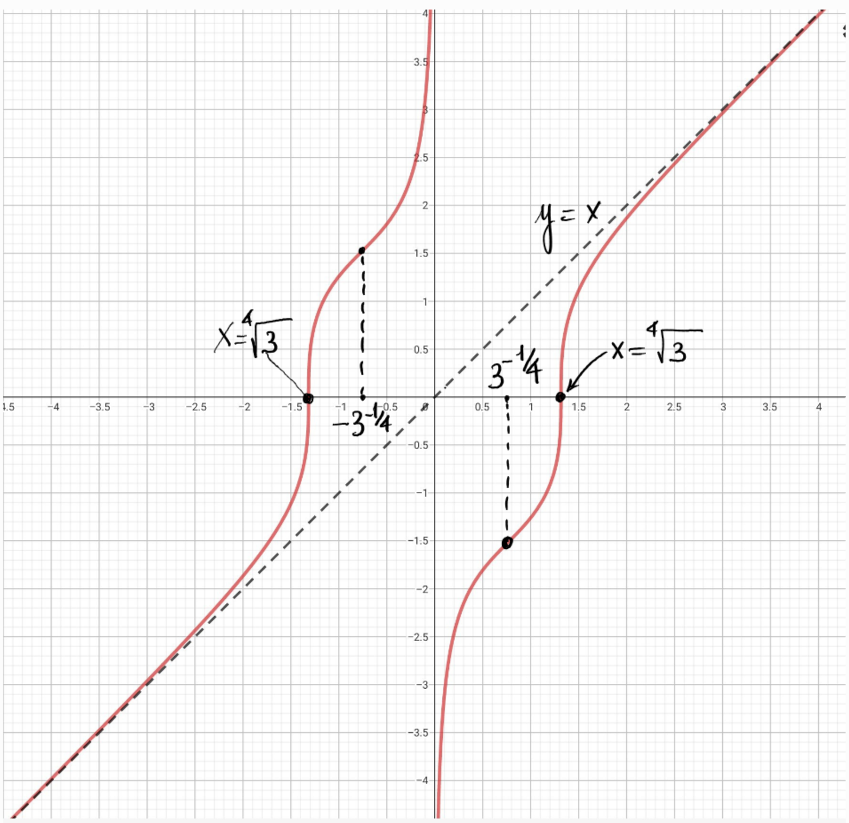
Quindi f risulta strettamente convessa in $\left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}},\sqrt[4]{3}\right]$,

strettamente concava in $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$ e in $\left[\sqrt[4]{3},+\infty\right)$

$x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ è un punto di flesso

$x=\sqrt[4]{3}$ è un punto di flesso a tang. verticale.

Tenendo conto della simmetria, il grafico risulta il seguente:



2. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$16z^4 = (2-z)^4 .$$

Dividendo per z^4 (che non è nullo in quanto $z=0$ non è soluzione) e ponendo $w = \frac{2-z}{z}$, l'equazione diventa $w^4 = 16$

$$\Rightarrow w_k = 2e^{ik\frac{\pi}{2}} \quad (k = 0,1,2,3)$$

$$\Rightarrow w_0 = 2, \quad w_1 = 2i, \quad w_2 = -2, \quad w_3 = -2i$$

Si tratta ora di trovare z

$$w = \frac{2-z}{z} \Leftrightarrow wz = 2-z \Leftrightarrow z(1+w) = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{1+w}$$

$$z_0 = \frac{2}{3}; \quad z_1 = \frac{2}{1+2i} = \frac{2(1-2i)}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i;$$

$$z_2 = -2; \quad z_3 = \frac{2}{1-2i} = \frac{2(1+2i)}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i.$$

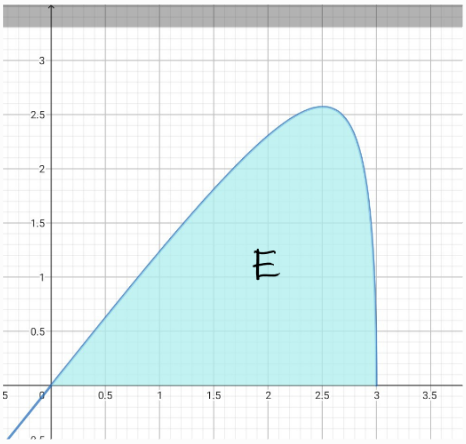
3. Calcolare l'area della regione del primo quadrante del piano cartesiano che si trova al di sotto del grafico di $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{9 - x^2}$.

La funzione è definita per $x \in [-3, 3]$.

Per $x \geq 0$ $f(x)$ è sempre ≥ 0, e si annulla solo per $x = 0$ e $x = 3$.

Vogliamo quindi calcolare l'area di (vedi figura)

$$E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3 \, , \, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



$$\text{Area } E = \int_0^3 x \operatorname{arctg} \sqrt{9-x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} \text{sost. } \sqrt{9-x^2} = t \\ x^2 = 9 - t^2 \\ \cancel{2}x\,dx = -\cancel{2}t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right]$$

$$= -\int_3^0 t \operatorname{arctg} t \, dt = \int_0^3 t \operatorname{arctg} t \, dt =$$

[per parti]

$$= \frac{1}{2} t^2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \underbrace{\frac{t^2}{1+t^2}}_{= 1 - \frac{1}{1+t^2}} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^3 =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}(x^2)}{x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{\alpha x + 1}{x} \right)^{x^2} - x^3 \right) e^{-x} \ (\alpha > 0).$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}(x^2) = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 - \left(x^2 + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) =$$

$$= \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - (\cancel{x^2} + o(x^4)) =$$

$$= \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \sim \frac{2}{3}x^4 \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi il primo limite vale $\frac{2}{3}$.

Per il secondo limite, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0 \quad \text{(gerarchia degli infiniti)},$$

quindi basta calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha x + 1}{x}\right)^{x^2} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \log\left(\alpha + \frac{1}{x}\right) - x}$$

Ora, $$x^2 \log\left(\alpha + \frac{1}{x}\right) - x = \begin{cases} x^2(\log \alpha + o(1)) \to +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ x^2(\log \alpha + o(1)) \to -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, allora

$$x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x^2\left(\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \to -\frac{1}{2}$$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

Quindi il limite cercato vale $$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ e^{-1/2} & \text{se } \alpha = 1. \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

5. a) Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 1$, di

$$f(x) = 4\operatorname{arctg} x - \pi\,;$$

b) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza (semplice/assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha n^2 + 2n}{n^2+1}\right) - \pi\right).$$

a) f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R}$.

$f(1) = 0$, $f'(1) = 2$, Quindi

$$f(x) = 2(x-1) + o(x-1) \quad \text{per} \quad x \to 1 \qquad (*)$$

(infinitesimo di ordine 1)

b) Per $\alpha \neq 1$ si ha

$$4\operatorname{arctg}\frac{\alpha n^2 + 2n}{n^2+1} - \pi \xrightarrow{n} 4\operatorname{arctg}\alpha - \pi \neq 0,$$

quindi è violata la C.N. per la convergenza $\Rightarrow$ la serie non converge né semplicemente né assolutamente

Per $\alpha = 1$, si ha

$$a_n := 4\operatorname{arctg}\left(\underbrace{\boxed{\frac{n^2+2n}{n^2+1}}}_{\to 1}\right) - \pi \overset{(*)}{\sim} 2\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1\right) = 2\,\frac{2n-1}{n^2+1} \sim \frac{4}{n}$$

Ne segue che, per confronto asintotico con la serie armonica, la nostra serie non converge assolutamente.

Potrebbe convergere semplicemente, verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz.

- $a_n > 0$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$, poiché $\frac{n^2+2n}{n^2+1} > 1$ quindi è una serie a termini di segno alterno
- $a_n \xrightarrow{n} 0$; già visto $\left(a_n \sim \frac{4}{n} \to 0\right)$.

- a_n def^{te} decrescente.

Poiché $\operatorname{arctg} x$ è una funzione crescente, basterà controllare che

$$b_n = \frac{n^2+2n}{n^2+1} \text{ è def}^{te} \text{ decrescente per } n \to +\infty$$

Posto $g(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$, si ha

$$g'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+2x+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{def}^{te} \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi $b_n = g(n)$ è def^{te} decrescente per $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n = 4\operatorname{arctg}(b_n) - \pi$ è def^{te} decrescente.

Quindi la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per $\alpha = 1$.