**1.** Studiare la funzione
$$f(x) = x\log(x^2) - (x-2)\log\left((x-2)^2\right)$$
e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dire se la funzione può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$ in modo che sia continua e/o derivabile. Dimostrare inoltre che il suo grafico è simmetrico rispetto a una retta.

**Dominio:** $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$

**Continuità e limiti significativi** $f$ è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left( \underbrace{x\log(x^2)}_{\to 0} - \underbrace{(x-2)\log(x-2)^2}_{\to -2\log 4} \right) = 4\log 2.$$

e similmente.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4\log 2.$$

Quindi $f$ è prolungabile in modo continuo in tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(0) = f(2) = 4\log 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2\left(x\log x - (x-2)\log(x-2)\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} 2\left( \underbrace{x\log\left(\frac{x}{x-2}\right)}_{=\, x\log\left(1+\frac{2}{x-2}\right) \sim \frac{2x}{x-2} \to 2} + 2\underbrace{\log(x-2)}_{\to +\infty} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 2\left( \underbrace{x\log\frac{|x|}{|x-2|}}_{=\, x\log\left(1+\frac{2}{x-2}\right) \to 2} + 2\log|x-2| \right) = +\infty.$$

Dai precedenti passaggi si ottiene che $f(x) \sim 2\log|x-2|$ per $x\to\pm\infty$ quindi non ha asintoti obliqui.

**Derivata prima:**

$$f'(x) = 2\left(\log|x| - \log|x-2|\right)$$

$f'(x) \gtreqless 0 \iff |x| \gtreqless |x-2| \iff x^2 \gtreqless (x-2)^2 \iff x \gtreqless 1$

Quindi

$f$ è strettamente crescente in $[1,2)$ e in $(2,+\infty)$

" " " decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,1]$.

$x=1$ è punto di min. assoluto.

Poiché $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$, ponendo $f(0) = f(2) = 4\log 2$ si ottiene che l'estensione è continua, come si è visto, ma non derivabile (sono punti a tangente verticale).

**Derivata seconda:**

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2-2x}$$

$f''(x) = 0$ mai

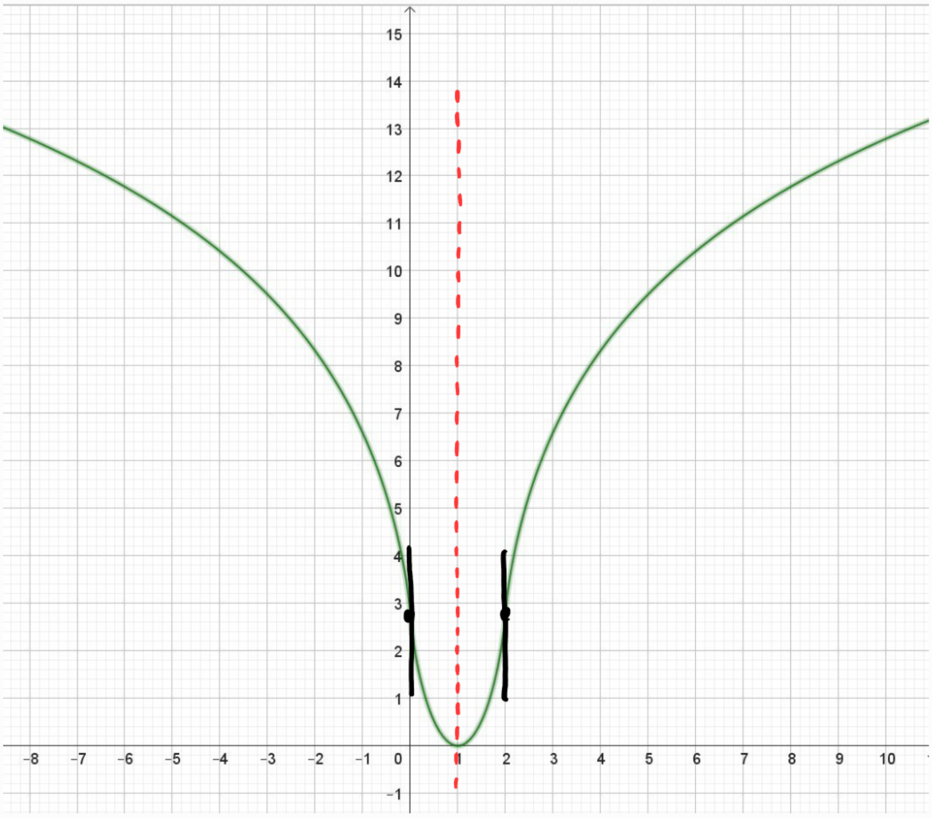
$f''(x) > 0 \iff x \in (0,2)$

$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

Quindi $f$ è strettamente convessa in $(0,2)$, strettamente concava in $(-\infty,0)$ e in $(2,+\infty)$. Non ci sono flessi (estendendo $f$ con continuità in $x=0$ e $x=2$ si otterrebbero dei flessi a tg. verticale).

Il grafico è riportato di seguito. Si intuisce che il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x=1$. Per dimostrarlo, si può provare che $g(x) = f(x+1)$ è pari, oppure che $f(1-x) = f(1+x)$. Infatti

$$\left.\begin{aligned} f(1+x) &= (1+x)\log(1+x)^2 - (x-1)\log(x-1)^2 \\ f(1-x) &= (1-x)\log(1-x)^2 + (1+x)\log(1+x)^2 \end{aligned}\right\} \text{ sono uguali tra loro.}$$


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**2.** Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0,$$

e utilizzare quanto trovato per scomporre *nei numeri reali* il polinomio $P(x) = x^6 + 7x^3 - 8$.

Ponendo $w = z^3$, si ottiene l'eq^ne di secondo grado $w^2 + 7w - 8 = 0$, le cui radici sono $w = 1$, $w = -8$.

$z^3 = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{2}{3}k\pi$ $(k = 0,1,2)$

$\Rightarrow z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

$z^3 = -8 \Rightarrow z = 2e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ $(k = 0,1,2)$

$z_3 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = \overline{z_3} = 1 - \sqrt{3}i$

Ne segue che

$$P(x) = (x-1)(x+2)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}i\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}i\right) =$$

$$= (x-1)(x+2)(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 4)$$

**3.** Calcolare

$$\int_a^b \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3x-4}}\right)\, dx\,,$$

con $a$ e $b$ scelti a piacere e distinti tra loro.

Il dominio della funzione integranda è dato dagli $x$ t.c. $\frac{1}{\sqrt{3x-4}} \in [-1,1]$

$\iff \sqrt{3x-4} \geq 1 \iff x \geq \frac{5}{3}$.

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3x-4}}\right) dx = \left[\begin{array}{l} \text{sost.} \\ \sqrt{3x-4} = t \quad x = \frac{t^2+4}{3} \\ dx = \frac{2}{3}t\, dt \end{array}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\int t \arccos\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[\begin{array}{l} \text{per parti:} \\ f'(t) = 2t\,, \quad f(t) = t^2 \\ g(t) = \arccos\frac{1}{t}\,, \\ g'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3}\left(t^2 \arccos\frac{1}{t} - \int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(t^2 \arccos\frac{1}{t} - \sqrt{t^2-1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\left((3x-4)\arccos\frac{1}{\sqrt{3x-4}} - \sqrt{3x-5}\right) + c$$

Quindi, prendendo <u>per esempio</u> $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, si ottiene

$$\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{8}{3}} \arccos\frac{1}{\sqrt{3x-4}}\, dx = \frac{1}{3}\left((3x-4)\arccos\frac{1}{\sqrt{3x-4}} - \sqrt{3x-5}\right)\Bigg|_{5/3}^{8/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(4\arccos\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{9}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

**4.** Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$f(x) = \log(2x) - \log(2\sin x)$ per $x \to 0^+$; $\qquad g(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-1} - \dfrac{\alpha}{x}$ per $x \to +\infty$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

$$f(x) = \log\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\Bigg) \sim \frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{\overbrace{x - \sin x}^{= x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}}}{\underbrace{\sin x}_{\sim x}} \sim \frac{x^2}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

(infinitesimo di ordine 2.)

$$g(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{\alpha}{x} =$$

[tenuto conto che $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$]

$$= x\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - \frac{\alpha}{x} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \alpha\right)\frac{1}{x} - \frac{3}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim \begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \alpha\right)\frac{1}{x} & \text{se } \alpha \neq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{8}\,\frac{1}{x^3} & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

per $x \to +\infty$.

Pertanto $g(x)$ è un infinitesimo $\begin{cases} \text{di ordine } 1 \text{ se } \alpha \neq \frac{3}{2} \\ \text{di ordine } 3 \text{ se } \alpha \end{cases}$

**5.** Data

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x+\operatorname{arctg}(x^2)-\alpha x}{x} & \text{se } x<0\\ \beta x-\cos(\gamma x) & \text{se } x\geq 0\,,\end{cases}$$

dire per quali valori dei parametri $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ essa verifica ciascuna delle seguenti proprietà:
a) $f$ è continua nell'origine;
b) $f$ è derivabile nell'origine;
c) $f$ ammette un estremo locale per $x=2$;
d) $f$ ammette un flesso per $x=2$.

a) si ha $f(0)=-1$. $f$ è continua da destra in $x=0$.
Essa è continua se e solo se

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\underbrace{2\frac{\sin x}{x}}_{\to 2}+\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}x^2}{x}}_{\to 0}-\alpha\right)=-1,$$

ossia $2-\alpha=-1$, ossia $\alpha=3$ ($\beta,\gamma$ qualsiasi).

b) Ovviamente per essere derivabile, $f$ deve essere continua ($\Rightarrow \alpha=3$).
Si ha $f'_+(0)=\beta+\gamma\sin(0)=\beta$.
Per essere derivabile deve aversi $f'_-(0)=\beta$, d'altra parte

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\dfrac{2\sin h+\operatorname{arctg}h^2-3h}{h}+1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{\overbrace{2\sin h}^{=\,2h+o(h^2)}+\overbrace{\operatorname{arctg}h^2}^{=\,h^2+o(h^2)}-2h}{h^2}=\lim_{h\to0^-}\frac{h^2+o(h^2)}{h^2}=1$$

Quindi $f$ è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha=3$, $\beta=1$ ($\gamma$ qualsiasi).

c) deve essere $f'(1)=\beta+\gamma\sin\gamma=0$. $(*)$
Se $f''(1)=\gamma^2\cos\gamma>0$, cioè $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\gamma<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $\gamma\neq0$,
allora $x=1$ è punto di min. relativo stretto.
se $f''(1)=\gamma^2\cos\gamma<0$, cioè $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\gamma<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$,
allora $x=1$ è punto di max. relativo stretto.

Vediamo i valori esclusi, che annullano $f''(1)$.

- se $\gamma=0$, quindi dalla $(*)$ $\beta=0$ allora $f(x)=-1$ per $x>0$, quindi tutti i punti $x>0$ sono di estremo relativo (massimo e minimo).
- se $\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi$, e $\beta=-\gamma\sin\gamma$, allora $f'''(1)=-\gamma^3\sin\gamma\neq 0$, quindi $f$ non è un punto di estremo relativo.

Riassumendo, $x=1$ è punto di estremo relativo se e solo se

$$\gamma\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}), \quad \beta=-\gamma\sin\gamma. \qquad (\alpha \text{ qualsiasi}).$$

d) deve essere $f''(1)=0$, cioè $\gamma^2\cos\gamma=0$. $<$ $\gamma=0$ ; $\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

- se $\gamma=0$, $f(x)=\beta x-1$ per $x>0$, quindi tutti i valori $x>0$ sono di flesso.
- se $\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $f'''(1)=-\gamma^3\sin\gamma\neq 0$, quindi $x=1$ è punto di flesso.

Quindi, $x=1$ è punto di flesso per $f$ se e solo se

$$\gamma=0 \text{ oppure } \gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \qquad (\alpha,\beta \text{ qualsiasi}).$$