Soluzioni compito 2022-06-10

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \log|x| \, (1 - \log|x|) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è dispari $\Rightarrow$ <u>basta studiarla per $x \geq 0$</u> $\Rightarrow$ togliamo il valore assoluto.

Segno: $f(x) = 0 \iff x = 0, 1, e$; $\quad f(x) > 0 \iff 1 < x < e$; $\quad f(x) < 0 \iff (0 < x < 1) \vee (x > e)$

Limiti significativi e asintoti: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (si usa il limite notevole $\lim_{x \to 0^+} x |\log x|^\alpha = 0 \ \forall \alpha$)

Quindi f è continua anche in 0 $\Rightarrow$ <u>f continua in $\mathbb{R}$.</u>

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \, \underbrace{\log x}_{+\infty} \, \underbrace{(1 - \log x)}_{-\infty} = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log x \, (1 - \log x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima: $f'(x) = -\log^2 x - \log x + 1 \quad \forall x > 0$

$$f'_+(0) \underset{f \text{ continua in } 0}{=} \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \underset{\text{simmetria}}{\Rightarrow} f'_-(0) = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ p.to a tg. verticale.}$$

$$f'(x) = 0 \iff -\log^2 x - \log x + 1 = 0 \iff \log x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff x = e^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

$$f'(x) > 0 \iff -\log^2 x - \log x + 1 > 0 \iff e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$f'(x) < 0 \iff \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad < 0 \iff \left(0 < x < e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) \vee \left(x > e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

f strettamente crescente in $\left[e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]$

f strettamente decrescente in $\underbrace{\left[0, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right]}_{}$ e in $\left[e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right)$

dunque, per simmetria, in $\left[-e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right]$

$x = e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ p.to di minimo locale stretto, $x = e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ p.to di massimo locale stretto

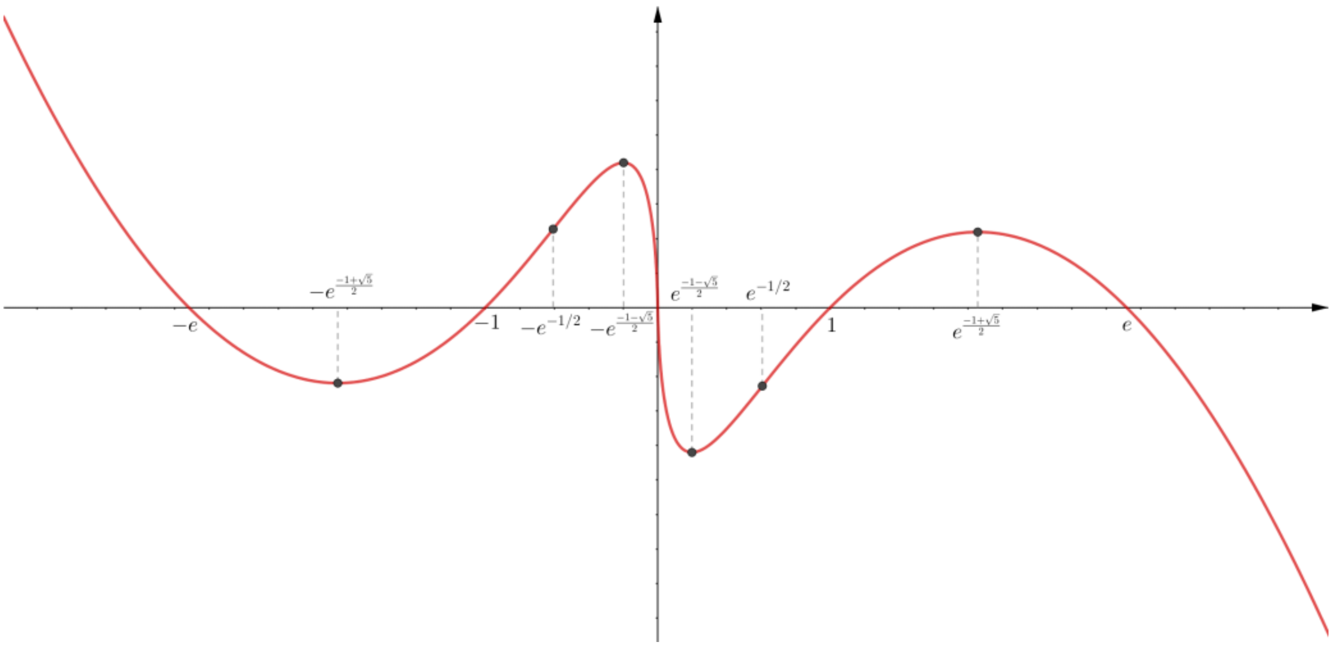
Derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{2\log x + 1}{x} \quad \forall x > 0$

$f''(x) = 0 \iff x = e^{-1/2}$; $\quad f''(x) > 0 \iff 0 < x < e^{-1/2}$; $\quad f''(x) < 0 \iff x > e^{-1/2}$

f strettamente convessa in $[0, e^{-1/2}]$, strettamente concava in $[e^{-1/2}, +\infty)$

$x = e^{-1/2}$ p.to di flesso

$x = 0$ p.to di flesso a tg. verticale. (per simmetria)



2. Calcolare

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1+i\sqrt{3})^{12}}$$

e successivamente le radici quarte di z.

$\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3}-i)^{16} = 2^{16} e^{-i\frac{16\pi}{6}} = 2^{16} e^{-i\frac{2}{3}\pi}$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^{12} = 2^{12} e^{i\pi\frac{12}{3}} = 2^{12}$

$\Rightarrow z = \frac{2^{16}}{2^{12}} e^{-i\frac{2}{3}\pi} = 2^4 e^{-i\frac{2}{3}\pi} = -8(1+\sqrt{3}i)$

Le radici quarte di z valgono: $w_k = 2e^{i\theta_k}$, $\theta_k = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$.

$w_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$; $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\sqrt{3}i$; $w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}+i$; $w_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -(1+\sqrt{3}i)$.

3. Dopo aver mostrato che si tratta di un integrale secondo Riemann, calcolare

$$\int_{-32}^{32} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2}\right) dx\,.$$

La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2}\right)$ non è definita in $x=0$, tuttavia $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2}\right)$ non è definita in $x=0$, tuttavia $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, quindi è prolungabile con continuità in $x=0$. Comunque la si definisca in $x=0$, risulta una funzione limitata in $[-32,32]$ e continua tranne al più in $x=0$. Quindi è integrabile secondo Riemann in $[-32,32]$. Il suo integrale non dipende dal valore scelto di $f(0)$.

Poiché f è pari, si ha:

$$\int_{-32}^{32} f(x)\,dx = 2\int_0^{32} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{sost. } \frac{\sqrt[5]{x}}{2} = t \Rightarrow x = 32t^5,\ dx = 160\,t^4\,dt \\ (x=0 \Rightarrow t=0),\ (x=32 \Rightarrow t=1)\end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2t} \operatorname{arctg} t \; 160t^4\,dt = 160\int_0^1 t^3 \operatorname{arctg} t\,dt = [\text{per parti}]$$

$$= 160\left[\frac{t^4}{4}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}\,dt\right] = 40\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^1\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt\right] =$$

$$= 40\left[\cancel{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} + 1 - \cancel{\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{80}{3}.$$

4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \cos(x^\alpha) - \cos(x^2)\ (\alpha > 0), \qquad g(x) = \sqrt{x^4 + x^5} - x^2 + \beta x^3\ (\beta \in \mathbb{R}), \qquad h(x) = e^{\sin x} - e^x .$$

- $f(x) = [\text{sviluppo di Maclaurin di } \cos t] = \cancel{1} - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) - \cancel{1} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) =$

$$= -\frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^{2\alpha}) + o(x^4).$$

$$\Rightarrow f \text{ è } \begin{cases} \text{infinitesimo di ordine } 2\alpha & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \text{infinitesimo di ordine } 4 & \text{se } \alpha > 2 \\ \text{identicamente nulla se } \alpha = 2. \end{cases}$$

- $g(x) = x^2\sqrt{1+x} - x^2 + \beta x^3 = [\text{sviluppo di Maclaurin di } \sqrt{1+x}]$

$$= x^2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - x^2 + \beta x^3 = \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x^3 - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Pertanto $g(x)$ è infinitesimo $\begin{cases} \text{di ordine } 3 \text{ se } \beta \neq -1/2 \\ \text{di ordine } 4 \text{ se } \beta = -1/2 \end{cases}$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$$e^{\sin x} \underset{\sin x \to 0}{=} 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x) = \left[\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$

$$e^{\sin x} \underset{\sin x\to 0}{=} 1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x) = \left[\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]$$

$$= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}_{x^2+o(x^3)}+\frac{1}{6}\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}_{x^3+o(x^3)}+\underbrace{o\left(\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)}_{o(x^3)}$$

$$= 1+x-\cancel{\frac{x^3}{6}}+o(x^3)+\frac{x^2}{2}+\cancel{\frac{x^3}{6}}$$

$$\Rightarrow h(x)=\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^3)\right)-\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

infinitesimo di ordine 3.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare dei parametri reali α e x:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log(e^{-n}+1+n^{\alpha}), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\log(e^{-n}+1+n^{-2})(x+3)^n.$$

- La prima serie è a termini positivi. Per $\alpha \geq 0$ si ha $\lim_{n\to+\infty}\log(e^{-n}+1+n^{\alpha}) \neq 0$, quindi la serie diverge. Per $\alpha<0$ si ha

$$\log(1+\underbrace{e^{-n}+n^{\alpha}}_{\to 0}) \sim e^{-n}+n^{\alpha} \underset{\left[\text{gerarchia degli } \infty\right]}{\sim} n^{\alpha}.$$ Quindi per confronto con la serie armonica gen.,

la serie converge se e solo se $\alpha<-1$.

La seconda serie è una serie di potenze, il cui raggio vale

$$r=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\log(e^{-n}+1+n^{-2})}^{\sim n^{-2}}}{\underbrace{\log(e^{-n-1}+1+(n+1)^{-2})}_{\sim n^{-2}}}=1.$$

Quindi la serie converge per $|x+3|<1$, cioè per $-4<x<-2$,

non converge per $|x+3|>1$, cioè per $(x<-4)\vee(x>-2)$.

Per $x=-2$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log(e^{-n}+1+n^{-2})$, che converge.

Per $x=-4$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log(e^{-n}+1+n^{-2})$, che converge assolutamente.

In definitiva la seconda serie converge se e solo se $-4\leq x\leq -2$.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|\Big((\log|x|)^2 - \log|x|\Big) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x \geq 0 \Rightarrow$ togliamo il valore assoluto.

Segno: $f(x) = 0 \iff x = 0, 1, e$; $\quad f(x) > 0 \iff (0<x<1) \vee (x>e)$; $\quad f(x) < 0 \iff 1 < x < e$

Limiti significativi e asintoti: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (si usa il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0^+} x|\log x|^\alpha = 0 \ \forall\alpha$)

Quindi f è continua anche in $0 \Rightarrow$ f continua in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty}\underbrace{(\log^2 x - \log x)}_{\to +\infty} = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\log^2 x - \log x) = +\infty$$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima: $f'(x) = \log^2 x + \log x - 1 \quad \forall x > 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty \ \underset{\text{simmetria}}{\Rightarrow} \ f'_-(0) = -\infty \Rightarrow x=0 \text{ p.to di cuspide}$$

(f continua in 0)

$f'(x) = 0 \iff \log^2 x + \log x - 1 = 0 \iff \log x = \dfrac{-1\pm\sqrt5}{2} \iff x = e^{\frac{-1\pm\sqrt5}{2}}$

$f'(x) > 0 \iff \log^2 x + \log x - 1 > 0 \iff \left(0 < x < e^{\frac{-1-\sqrt5}{2}}\right) \vee \left(x > e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right)$

$f'(x) < 0 \iff$ " " " $< 0 \iff e^{\frac{-1-\sqrt5}{2}} < x < e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}$

f strettamente decrescente in $\left[e^{\frac{-1-\sqrt5}{2}}, e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right]$

f strettamente crescente in $\left[0, e^{\frac{-1-\sqrt5}{2}}\right]$ e in $\left[e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}, +\infty\right)$

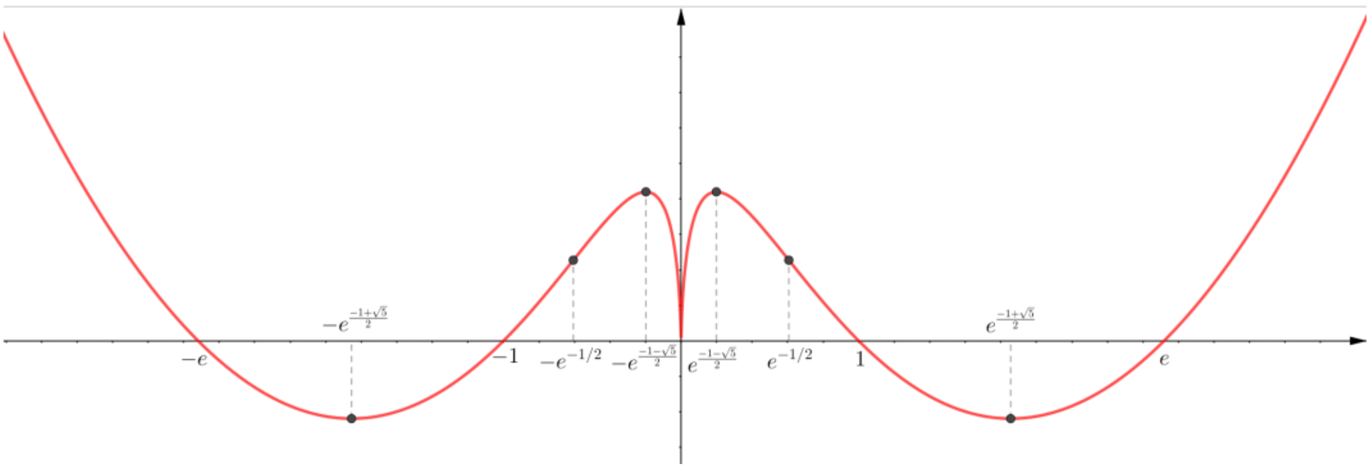
$x = e^{\frac{-1-\sqrt5}{2}}$ p.to di massimo locale stretto, $x = e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}$ p.to di minimo locale stretto

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\log x + 1}{x} \quad \forall x > 0$

$f''(x) = 0 \iff x = e^{-1/2}$; $\quad f''(x) > 0 \iff x > e^{-1/2}$; $\quad f''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{-1/2}$

f strettamente convessa in $[e^{-1/2}, +\infty)$, strettamente concava in $[0, e^{-1/2}]$.

$x = e^{-1/2}$ p.to di flesso



2. Calcolare

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{12}}{(\sqrt{3}-i)^{16}}$$

e successivamente le radici quarte di z.

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^{12} = 2^{12} e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 12} = 2^{12}$

$\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3}-i)^{16} = 2^{16} e^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 16} = 2^{16} e^{-i\frac{2}{3}\pi}$

$z = \dfrac{2^{12}}{2^{16}} e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2^{-4} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{32}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

Le radici quarte di z sono $w_k = \frac{1}{2} e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$.

$w_0 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)$; $w_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{3}i)$; $w_2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)$;

$w_3 = \frac{1}{2} e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}i)$

3. Dopo aver mostrato che si tratta di un integrale secondo Riemann, calcolare

$$\int_{-4}^{4} |x| \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{|x|}}\right) dx\,.$$

La funzione integranda $f(x)$ non è definita per $x=0$, tuttavia si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Quindi, comunque si definisca $f(0)$, la funzione risulta limitata in $[-4,4]$, e continua in tutti i punti eccetto al più $x=0$. Quindi risulta integrabile secondo Riemann in $[-4,4]$, e il valore dell'integrale non dipende dalla scelta di $f(0)$. Poiché f è pari, si ha

$\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 2\int_0^4 f(x)\,dx = 2\int_0^4 x \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx =$ $\left[\text{sost } \frac{\sqrt{x}}{2} = t,\ x = 4t^2,\ dx = 8t\,dt \quad (x=0 \Rightarrow t=0),\ (x=4 \Rightarrow t=1)\right]$

$\displaystyle = 2\int_0^1 4t^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) 8t\,dt = 64\int_0^1 t^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt =$ [per parti] (altre sostituzioni possibili)

$$= 2\int_0^1 4t^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) 8t\, dt = 64\int_0^1 t^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt = \text{[per parti]}$$

(altre sostituzioni possibili $\sqrt{x} = t$, $\frac{2}{\sqrt{x}} = t$)

$$= 64\left[\frac{1}{4}t^4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^4}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt\right]$$

non si può mettere direttamente $t=0$, basta fare $\lim_{t\to0^+}$

$$= 16\left[\frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2} dt\right] = 16\left[\frac{\pi}{4} + \int_0^1\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt\right] = 16\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right] = 16\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= 8\pi - \frac{32}{3}$$

4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \cos(x^3) - \cos(x^\alpha)\ (\alpha > 0), \qquad g(x) = \sqrt{x^4 + 2x^5} - x^2 + \beta x^3\ (\beta \in \mathbb{R}), \qquad h(x) = e^x - e^{\sin x}.$$

- $\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$; $\cos(x^\alpha) = 1 - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$ per $x \to 0^+$.

Pertanto $f(x) = \cancel{1} - \frac{x^6}{2} + o(x^6) - \left(\cancel{1} - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})\right) =$

$$= \frac{x^{2\alpha}}{2} - \frac{x^6}{2} + o(x^6) + o(x^{2\alpha}).$$

$$\Rightarrow f(x) \begin{cases} \text{è un infinitesimo di ordine } 6 & \text{se } \alpha > 3 \\ \text{è un infinitesimo di ordine } 2\alpha & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ \text{è identicamente nulla} & \text{se } \alpha = 3. \end{cases}$$

- $g(x) = x^2\sqrt{1+2x} - x^2 + \beta x^3 =$ [sviluppo di Maclaurin di $\sqrt{1+t}$]

$$= x^2\left(\cancel{1} + x - \frac{4}{8}x^2 + o(x^2)\right) - \cancel{x^2} + \beta x^3 =$$

$$= (1+\beta)x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ è infinitesimo di ordine } \begin{cases} 3 & \text{se } \beta \neq -1 \\ 4 & \text{se } \beta = -1 \end{cases}$$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$; $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow e^{\underset{\boxed{\sin x \to 0}}{\sin x}} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \underbrace{o(\sin^3 x)}_{= o(x^3)} =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}_{= x^2 + o(x^3)} + \frac{1}{6}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}_{= x^3 + o(x^3)} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{6}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Pertanto
$$h(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0^+$

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare dei parametri reali α e x:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(n^\alpha + 1 + e^{-n}), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log(n^{-2} + 1 + e^{-n})(x-3)^n .$$

- La prima serie è a termini positivi. Per $\alpha \geq 0$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n^\alpha + 1 + e^{-n}) \neq 0$, quindi la serie diverge. Per $\alpha < 0$ si ha

$$\log(1 + \underbrace{e^{-n} + n^\alpha}_{\to 0}) \sim e^{-n} + n^\alpha \underset{\text{[gerarchia degli } \infty]}{\sim} n^\alpha.$$ Quindi per confronto con la serie armonica gen.

la serie converge se e solo se $\alpha < -1$.

La seconda serie è una serie di potenze, il cui raggio vale

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\log(n^{-2} + 1 + e^{-n})}^{\sim n^{-2}}}{\underbrace{\log((n+1)^{-2} + 1 + e^{-n-1})}_{\sim n^{-2}}} = 1 .$$

Quindi la serie converge per $|x-3| < 1$, cioè per $2 < x < 4$

non converge per $|x-3| > 1$, cioè per $(x<2) \vee (x>4)$

Per $x = 4$ si ottiene la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(n^{-2} + 1 + e^{-n})$, che converge.

Per $x = 2$ si ottiene la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(n^{-2} + 1 + e^{-n})$, che converge assolutamente.

In definitiva la seconda serie converge se e solo se $2 \leq x \leq 4$.