1. Studiare la funzione
$$f(x) = x + \log\left(\frac{6-x}{|x|}\right) ,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$.

Continuità e limiti significativi: f è continua nel suo dominio.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$

$x = 0$ e $x = 6$ asintoti verticali.

$y = x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Derivata prima, monotonia: f è derivabile nel suo dominio.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 6}{x^2 - 6x} \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

$f'(x) = 0 \iff x = 3 \pm \sqrt{3}$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, 6)$

f strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$;

f strettamente decrescente in $(0, 3-\sqrt{3}]$ e in $[3+\sqrt{3}, 6)$

$x = 3 - \sqrt{3}$ punto di minimo locale stretto

$x = 3 + \sqrt{3}$ " " massimo " "

Derivata seconda, concavità, convessità:

$$f''(x) = \frac{12(3-x)}{(x^2-6x)^2} \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$f''(x) = 0 \iff x = 3$

$f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$

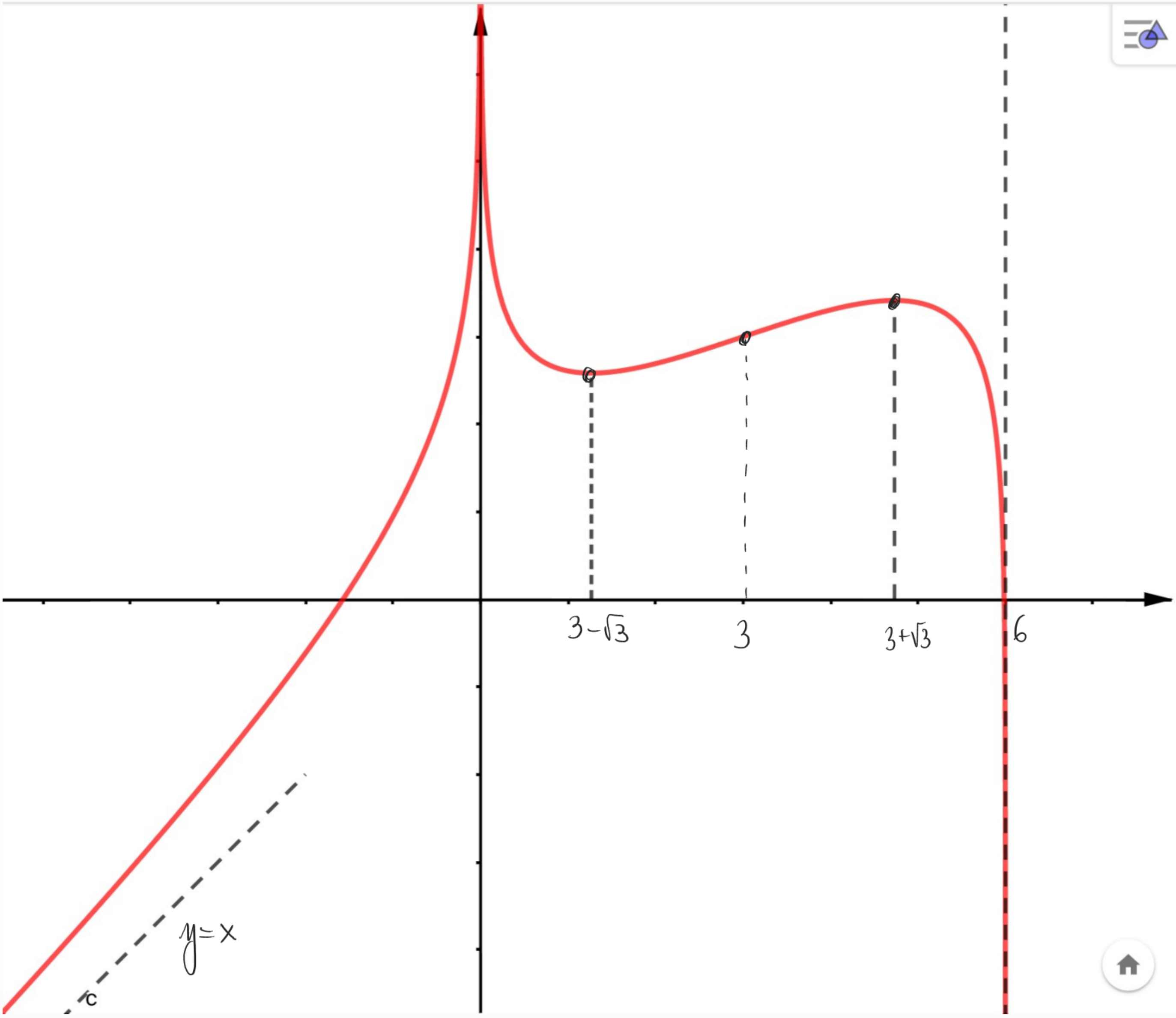
$f''(x) < 0 \iff x \in (3, 6)$

f è strettamente convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 3]$

strettamente concava in $[3, 6)$

$x = 3$ è punto di flesso.

Segue grafico qualitativo di f.



2. a) Trovare le radici quarte di $\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$, e disegnarle nel piano complesso.

b) Trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{2+z}{2-z}$ sia immaginario puro, e disegnarli nel piano complesso.

a) Prima si calcola $\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ in coord. polari

$$4-4i\sqrt{3} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}, \qquad 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{4-4i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = 4\, e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

Le radici quarte valgono $z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, $k=0,1,2,3$, cioè:

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right), \qquad z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right),$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{6}\pi i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right), \qquad z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

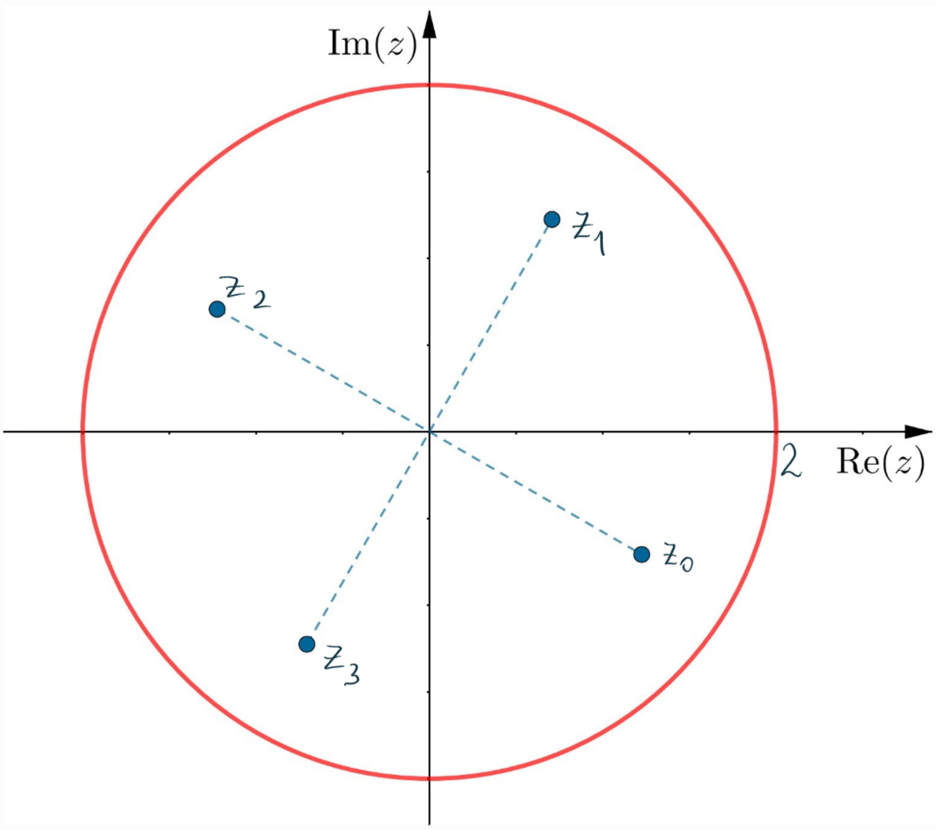
b) Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{2+z}{2-z} = \frac{2+x+iy}{2-x-iy} = \frac{(2+x+iy)(2-x+iy)}{(2-x)^2+y^2} = \frac{(2+iy)^2-x^2}{(2-x)^2+y^2} =$$

moltiplico e divido per $2-x+iy$

$$= \frac{(4-y^2-x^2)+2iy}{(2-x)^2+y^2} \in \mathbb{R} \iff x^2+y^2=4 \iff |z|=2$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

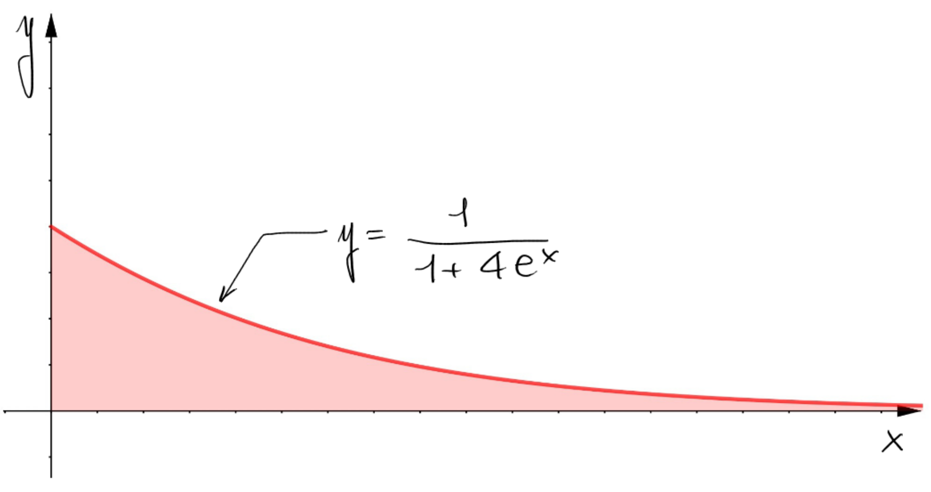


In blu le sol.ni di a)

In rosso le sol.ni di b).

3. Calcolare l'area della regione (illimitata) del primo quadrante del piano cartesiano compresa tra gli assi cartesiani e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 4e^x} \; .$$



La regione è quella colorata in figura. La sua area è: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4e^x}$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{1+4e^x} \underset{\substack{e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t}}}{=} \int \frac{dt}{(1+4t)t} \underset{\substack{\text{scomposizione} \\ \text{in fratti semplici}}}{=} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{4}{1+4t} \right) dt =$$

$$= \log \frac{t}{1+4t} + c = \log \left(\frac{e^x}{1+4e^x} \right) + c$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4e^x} = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} \frac{dx}{1+4e^x} = \lim_{\omega \to +\infty} \left[\log \left(\frac{e^\omega}{1+4e^\omega} \right) - \log \frac{1}{5} \right] =$$

$$= \log \frac{1}{4} - \log \frac{1}{5} = \log \frac{5}{4} \; .$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sqrt{n})^{-\frac{1}{\log n}}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\cos x-1}\,.$$

a) E' una forma indeterminata del tipo $(+\infty)^0$.

$$(n^2+\sqrt{n})^{-\frac{1}{\log n}} = e^{-\frac{\log(n^2+\sqrt{n})}{\log n}} \longrightarrow e^{-2} \quad \text{per } n\to+\infty$$

in quanto $\log(n^2+\sqrt{n}) = \log(n^2) + \underbrace{\log(1+n^{-3/2})}_{=o(1)} =$

$$= 2\log n + o(1) \sim 2\log n.$$

b) Si tratta di una f. i. del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Usando lo sviluppo di Maclaurin di $\sqrt{1+x}$ si ha:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 =$$

$$=\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)+\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)-\cancel{2} =$$

$$= -\frac{x^2}{4}+o(x^2) \qquad \text{per } x\to 0$$

Poiché $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$,

il limite vale $\frac{-1/4}{-1/2} = \frac{1}{2}$.

5. a) Trovare lo sviluppo di Maclaurin del terzo ordine di $f(x)=\log(2-e^x)+\operatorname{arctg} x$.

b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\log(2-e^{1/n})+\operatorname{arctg}\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n^2}\right).$$

a) Usando gli sviluppi di Maclaurin

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad \text{per } x\to 0$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad \text{"}$$

$$\log(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3) \qquad \text{per } t\to 0,$$

con $t = 1-e^x = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \longrightarrow 0$,

si ottiene

$$\log(2-e^x) = \log\Big(1+\underbrace{(1-e^x)}_{\downarrow\, 0}\Big) =$$

$$= \left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}\underbrace{\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}_{x^2+x^3+o(x^3)}+$$

$$+\frac{1}{3}\underbrace{\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}_{-x^3+o(x^3)}+\underbrace{o\left(\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)}_{\substack{\| \\ o(x^3)}} =$$

$$= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3} =$$

$$= -x-x^2-x^3+o(x^3) \qquad \text{per } x\to 0$$

Pertanto $f(x) = \cancel{-x}-x^2-x^3+\cancel{x}-\frac{x^3}{3}+o(x^3) =$

$$= -x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3) \qquad \text{per } x\to 0$$

b) Per il precedente punto, il termine a_n della serie vale

$$a_n = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\alpha}{n^2}\right) = n\left((\alpha-1)\frac{1}{n^2} - \frac{4}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$= (\alpha-1)\frac{1}{n} - \frac{4}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie diverge se $\alpha \neq 1$. (precisamente, diverge a $\pm\infty$ a seconda che $\alpha \gtrless 1$).

Se invece $\alpha = 1$, si ha $a_n \sim -\frac{4}{3}\frac{1}{n^2}$, e la serie (che è def^{te} a termini negativi) converge per confronto con la serie armonica generalizzata.