Risoluzione A

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}\right),$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $x \neq 1$. Non è periodica, non sembra avere simmetrie.
Continua nel suo dominio

Limiti significativi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$; $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$.

$y = -\frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale.

Derivata prima: Per $x \neq 0$ f è derivabile, e $f'(x) = \dfrac{1}{5\left(2x^{6/5} - 2x + x^{4/5}\right)}$

$f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, quindi f non è derivabile in $x=0$ (si tratta di un punto a tg. verticale ascendente).

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

f risulta strettamente crescente in $(-\infty,1)$ e in $(1,+\infty)$

Non ci sono punti di estremo relativo o assoluto.

$\lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{5}$.

Derivata seconda

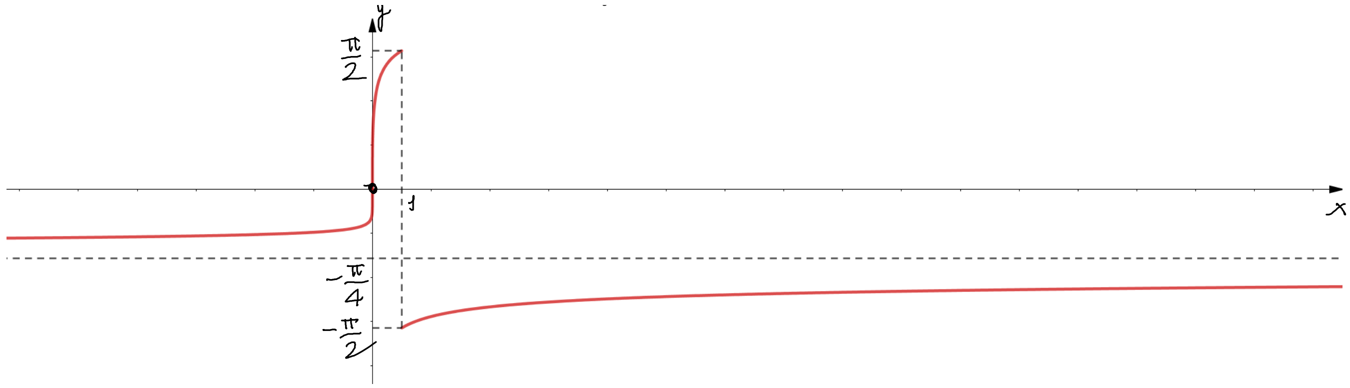
Per $x \neq 0, 1$ si ha

$$f''(x) = -\frac{2}{25}\,\frac{6x^{2/5} - 5x^{1/5} + 2}{x^{1/5}\left(2x^{6/5} - 2x + x^{4/5}\right)^2}$$

$f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$
$f''(x) < 0$ per $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

f risulta strettamente convessa in $(-\infty, 0]$,
strettamente concava in $[0,1)$ e in $(1,+\infty)$.

$x = 0$ è un punto di flesso a tg. verticale.



---

2. a) Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\dfrac{\alpha + 3i}{1 - \alpha i} \in \mathbb{R}$.

b) Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, risolvere nei complessi l'equazione $(\overline{z})^3 |z|^3 = \beta i$.

a) $\dfrac{\alpha + 3i}{1-\alpha i} = \dfrac{(\alpha+3i)(1+\alpha i)}{1+\alpha^2} = \dfrac{-2\alpha + i\,(3+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \in \mathbb{R} \iff 3+\alpha^2 = 0$ per nessun valore di α!

b) Posto $z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$, si ha $(\overline{z})^3 |z|^3 = r^6 e^{-i3\theta}$. Si distinguono tre casi:

- se $\beta = 0$, l'unica sol^{ne} è $z_0 = 0$
- Se $\beta > 0$, l'equazione diventa $r^6 e^{-i3\theta} = \beta\, e^{i\frac{\pi}{2}}$, da cui $r = \sqrt[6]{\beta}$, $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

Quindi
$$z_0 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt[6]{\beta}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$$
$$z_1 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[6]{\beta}\, i$$
$$z_2 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt[6]{\beta}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

- Se $\beta < 0$, l'eq^{ne} diventa $r^6 e^{-i3\theta} = (-\beta)\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$, da cui $r = \sqrt[6]{-\beta}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$

Quindi
$$z_0 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt[6]{-\beta}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$$
$$z_1 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt[6]{-\beta}}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$$
$$z_2 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\sqrt[6]{-\beta}$$

---

3. Calcolare

$$\int x^3 \log(x^8 + 5x^4 + 6)\, dx\,.$$

$$\int x^3 \log(x^8+5x^4+6)\, dx = \frac{1}{\ } \int \log(t^2+5t+6)\, dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{\ }\int \log|t+2|\, dt + \frac{1}{\ }\int \log|t+3|\, dt$$

$$\int x^3 \log(x^8+5x^4+6)\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{c} x^4=t \\ 4x^3dx=dt \end{array}}}{=} \frac{1}{4}\int \log(t^2+5t+6)\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\int \log|t+2|\,dt + \frac{1}{4}\int \log|t+3|\,dt$$

$$\int \log|t+2|\,dt = \underset{\boxed{\text{sost. } s=t+2}}{} \int \log|s|\,ds \underset{\boxed{\text{per parti}}}{=} s\log|s| - \int 1\,ds = s(\log|s|-1)+c =$$
$$= (t+2)(\log|t+2|-1)+c$$

e similmente

$$\int \log|t+3|\,dt = (t+3)(\log|t+3|-1)+c$$

Quindi l'integrale cercato vale $\frac{1}{4}\left[(x^4+2)(\log(x^4+2)-1)+(x^4+3)(\log(x^4+3)-1)\right]+c.$

(*) In alternativa si può proseguire per parti:

$$\frac{1}{4}\int \log(t^2+5t+6)\,dt = \frac{1}{4}\left[t\log(t^2+5t+6) - \int \frac{2t^2+5t}{t^2+5t+6}\,dt\right]$$

Per l'ultimo integrale si ha (divisione e poi metodo dei fratti semplici):

$$\int \frac{2t^2+5t}{t^2+5t+6}\,dt = \int\left(2-\frac{5t+12}{t^2+5t+6}\right)dt = 2t - \int\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+3}\right)dt \underset{\boxed{\begin{array}{c} A=2 \\ B=3 \end{array}}}{=}$$

$= 2t - 2\log|t+2| - 3\log|t+3| + c$, un risultato che differisce per una costante dal precedente.

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x - \log(1+\mathrm{tg}(x^3)), \qquad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+\mathrm{tg}(x^3))}, \qquad h(x) = x^3 - \log(1+\mathrm{tg}(x^3)).$$

Osserviamo che, poiché $\mathrm{tg}(x^3) \sim x^3 \to 0$ per $x \to 0$, si ha

$\log(1+\mathrm{tg}(x^3)) \sim \mathrm{tg}(x^3) \sim x^3$ per $x \to 0$. Quindi

$$f(x) = x\left(1-\underbrace{\frac{\log(1+\mathrm{tg}(x^3))}{x}}_{\to 0}\right) \sim x \quad \text{è un infinitesimo di ordine 1.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3}\left(\underbrace{x^2}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x^3}{\log(1+\mathrm{tg}(x^3))}}_{\to 1}\right) \sim -\frac{1}{x^3} \quad \text{è un infinito di ordine 3.}$$

Per la terza funzione bisogna usare il polinomio di Maclaurin. Tenuto conto che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \operatorname{tg} t = t + o(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ha $\log(1+\operatorname{tg}(x^3)) = \log(1 + x^3 + o(x^6)) = x^3 + o(x^6) - \frac{1}{2}\underbrace{(x^3 + o(x^6))^2}_{x^6 + o(x^6)} + \underbrace{o((x^3+o(x^6))^2)}_{\overset{\shortparallel}{o(x^6)}} =$

$$= x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6).$$

Pertanto $h(x) = x^3 - \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right) = \frac{x^6}{2} + o(x^6) \sim \frac{x^6}{2}$ infinitesimo di ordine 6.

---

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n - 1\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n - 1\right)\left(2+\operatorname{tg} x\right)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La prima è una serie a termini positivi. Ponendo $a_n = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n - 1$, si ha

$$a_n = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n - 1 = e^{n\log\frac{2n^2+3}{2n^2+1}} - 1 = (\star)$$

poiché $n\log\frac{2n^2+3}{2n^2+1} = n\log\left(1 + \underbrace{\frac{2}{2n^2+1}}_{\downarrow \, 0}\right) \sim \frac{2n}{2n^2+1} \sim \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$,

$\boxed{\log(1+t) \sim t \text{ per } t \to 0}$

$(\star) \sim n\log\frac{2n^2+3}{2n^2+1} \sim \frac{1}{n}$,

$\boxed{e^t - 1 \sim t \text{ per } t \to 0}$

quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

Ponendo $t = 2 + \operatorname{tg} x$, la serie diventa una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\sim 1/n}{a_n}}{\underbrace{a_{n+1}}_{\sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}}} = 1, \quad \text{dove di nuovo } a_n = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n - 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente per $|t|<1$, non converge per $|t|>1$.

Per $t=1$ è la serie vista prima, e diverge. Per $t=-1$, diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$,

che converge per il criterio di Leibniz. Per verificare che $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, consideriamo la funzione $f(x) = \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^x - 1$, la cui derivata vale

$$f'(x) = D\left(e^{x\log\frac{2x^2+3}{2x^2+1}}\right) = \underbrace{e^{x\log\frac{2x^2+3}{2x^2+1}}}_{\vee}\Bigg[\underbrace{\log\frac{2x^2+3}{2x^2+1}}_{\shortparallel} - \underbrace{\frac{8x^2}{(2x^2+3)(2x^2+1)}}_{\shortparallel}\Bigg] =$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\vee \\ 0}} \Big[\underbrace{\quad 2x^2+1}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}} \qquad \underbrace{(2x^2+3)(2x^2+1)}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}} \Big]$$

$$= e^{x \log\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)} \left[-\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] < 0 \quad \text{definitivamente per } x \to +\infty .$$

Quindi $a_n = f(n)$ è definitivamente decrescente per $n \longrightarrow +\infty$. In definitiva, la serie converge per $t = 2 + \operatorname{tg} x \in [-1, 1)$, cioè per $-3 \le \operatorname{tg} x < -1$,

cioè per $-\operatorname{arctg} 3 + k\pi \le x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.