Serie a termini con segno variabile

$a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

Criterio rapporto/radice

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell \\ \text{oppure} \\ \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \ell \in [0,1) \text{ la serie } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge assolutam.} \\ \text{se } \ell \in (1,+\infty] \text{ la serie } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non converge} \end{cases}$$

Serie a termini di segno alterno

Sono le serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

con $a_k > 0$. Esempi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}}.$$

Continuano a valere i criteri precedenti, ma in più c'è il seguente.

CRITERIO di LEIBNIZ Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} t.c.

- $a_k \to 0$ per $k \to +\infty$
- $\{a_k\}$ decrescente (def^{te})

$\Rightarrow (a_k > 0)$. (def^{te}).

Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.

Inoltre vale la seguente stima: detta $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$

allora $$|s_n - s| \leq a_{n+1}.$$

somma della serie

<u>Applicazioni</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $a_k = \frac{1}{k} \to 0$

a_k decrescente

quindi converge.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}}$ $a_k = \frac{1}{\sqrt{3+k}} \to 0$

a_k decrescente

Quindi anche questa serie converge

<u>Dim</u> $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $a_k \to 0$

$a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k.$

1) $\{s_{2n}\}$ è decrescente; $\{s_{2n-1}\}$ è crescente.

$$s_{2n} \overset{?}{\geq} s_{2n+2} \iff \cancel{s_{2n}} \overset{?}{\geq} \cancel{s_{2n}} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{2n+1} \overset{?}{\geq} a_{2n+2}$$

vero perché $a_k \downarrow$

analogamente per $\{s_{2n-1}\}$.

2) $\{s_{2n}\}$ è limitata inferiormente; $\{s_{2n+1}\}$ è limitata sup.

minorante cercato

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1} \geq s_{2n-3} \geq \dots \geq s_1 = a_0 - a_1$$

3) $\{S_{2n}\}$ è decrescente e limitata inf. $\Rightarrow$ $\{S_{2n}\}$ converge $\quad S_{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} S'' \in \mathbb{R}$

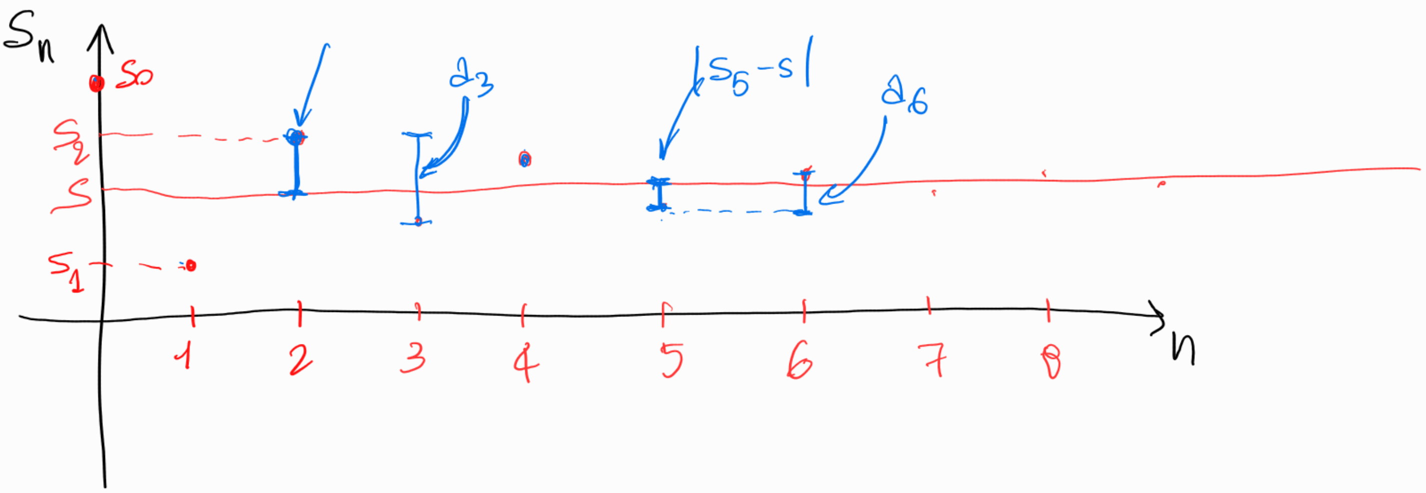
$\{S_{2n+1}\}$ è crescente e limitata sup $\Rightarrow$ $S_{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} S' \in \mathbb{R}$.

4) $\boxed{S' = S''}$ infatti $S'' - S' = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\underbrace{S_{2n} - S_{2n+1}}_{= a_{2n}}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$$

Pongo $S' = S'' = S$ $\qquad \left.\begin{matrix} S_{2n} \to S \\ S_{2n+1} \to S \end{matrix}\right| \Rightarrow S_n \to S \in \mathbb{R}$

Quindi la serie converge.



Dall'osservazione di questo grafico si capisce la stima

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k^2+1}$$

non conv. ass.

$$\left|(-1)^k \frac{k-1}{k^2+1}\right| = \frac{|k-1|}{|k^2+1|} \underset{k\geq 1}{=} \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k}$$

La cui serie diverge.

Proviamo ad applicare Leibniz, con

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+1} \qquad k \geq 1$$

1) $a_k \overset{?}{\to} 0$ OK

2) a_k decrescente? controlliamo.

1° modo $\quad a_{k+1} \overset{?}{\leq} a_k \iff \dfrac{(k+\cancel{1})-\cancel{1}}{(k+1)^2+1} \overset{?}{\leq} \dfrac{k-1}{k^2+1}$

$$\iff k(k^2+1) \overset{?}{\leq} (k-1)(k^2+2k+2)$$

$$\iff \cancel{k^3}+k \overset{?}{\leq} \cancel{k^3}+2k^2+\cancel{2k}-k^2-\cancel{2k}-2$$

$$\iff k^2-k-2 \overset{?}{\geq} 0$$ vero per k abbastanza grande.

2° modo. Sia $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ oss $f(k) = a_k$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \overset{?}{<} 0$$

def^{te} per $x \to +\infty$?

sì perché denom > 0
num def^{te} < 0 per $x \to +\infty$

$$\exists\, x_0 \text{ t.c. } \forall x \geq x_0 \quad f'(x) < 0$$

$\Rightarrow f$ decrescente in $[x_0, +\infty)$.

$a_k \geq a_{k+1} \iff f(k) \geq f(k+1)$ vero $\forall k \geq x_0$

3° modo (errato)

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k} \quad \text{per } k \to +\infty \quad \Big| \Rightarrow a_k \text{ decrescente}$$

falso!

$\frac{1}{k}$ decrescente

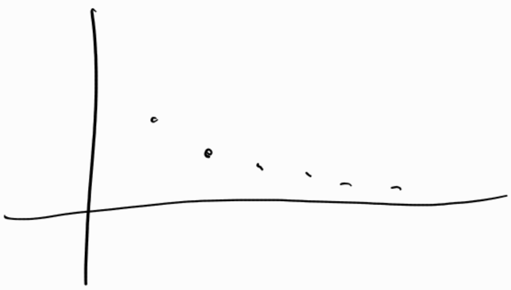
Non è detto che se due succ^{ni} sono asintoticamente equivalenti e una è decrescente, anche l'altra esempio.

Voglio trovare due succ^{ni} a_n, b_n t.c. $a_n \sim b_n$ una è decrescente e l'altra no.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

è ovvio che $a_n \sim b_n$, $\{b_n\}$ decrescente ma $\{a_n\}$ no



Verificare che $a_{2n+1} \leq a_{2n+2}$.

Quindi la decrescenza va studiata sulla serie di partenza

Uso della stima

Vorrei stimare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{con un errore inferiore a } 10^{-3}$$

La serie converge (si può dim. con la conv. assoluta (criterio del rapporto)) oppure con Leibniz $a_k = \frac{1}{k!}$ infinitesima e decrescente.

Uso la stima di Leibniz.

$$|S_n - S| < a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)! > 1000 \qquad \text{vero per } n=6$$

$$S_6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= \frac{53}{144}.$$

ed è un'approssimazione per eccesso.

$$0{,}36705 \approx \frac{53}{144} - 10^{-3} \leq S \leq \frac{53}{144} \approx 0{,}36805$$

Informazione supplementare $\boxed{S = \frac{1}{e}}$ da vedere dopo.

$$\frac{1}{e} \approx 0{,}36788\ldots \quad \text{ok.}$$

Serie di potenze

DEF si dice **serie di potenze** una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

, dove x_0 fissato (centro della serie) e $\{a_k\}$ è assegnata.

(x è un parametro)

Vogliamo studiare la convergenza al variare di x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(x-3)^k}{k+2}}}_{= a_k}$$

serie di potenze centrata in $x_0 = 3$.

Per $x=3$ la serie converge banalmente.

Usiamo il criterio della radice per serie a segni qualunque

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{|x-3|^k}{k+2}} = \frac{|x-3|}{\sqrt[k]{k+2}} \to |x-3| \lessgtr 1.$$

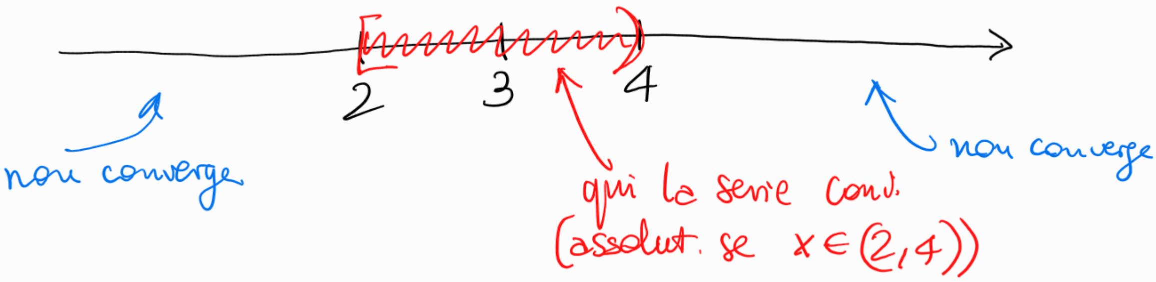
Se $|x-3|<1$, cioè $2<x<4$, la serie converge (assolut.)

se $|x-3|>1$ cioe $(x<2) \vee (x>4)$ la serie non converge

$$x = 4 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} \quad \text{diverge (serie armonica)}$$

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \quad \text{converge per Leibniz.}$$

In definitiva la serie converge $\iff x \in [2,4)$



TEOREMA (Convergenza delle Σ di potenze)

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze.

Allora $\exists$ $r \in [0,+\infty]$, detto raggio di convergenza della serie, t.c.

1) se $|x-x_0| < r$, la serie conv. assolutamente

2) se $|x-x_0| > r$, la serie non converge.

[OSS Se $r \in (0,+\infty)$, il teorema non dice nulla in $x_0 \pm r$].

Il raggio di convergenza r vale

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad \text{oppure} \quad r = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

se tali limiti esistono.

OSS Prendiamo la serie precedente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+2}$

$$a_k = \frac{1}{k+2}.$$

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+3}{k+2} = 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge per $|x-3| < 1$

non conv. $|x-3| > 1$.

Nei due estremi $x=2$ e $x=4$ può succedere di tutto.

Dim. nell'ipotesi che esista $\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$, che chiamo r.

Usiamo il criterio del rapporto $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-x_0)^k}_{b_k}$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}||x-x_0|^{\cancel{k+1}}}{|a_k|\,\cancel{|x-x_0|^k}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \boxed{|x-x_0|} \qquad (*)$$

1) supponiamo $r = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \in (0,+\infty)$

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-x_0| \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x-x_0|}{r}$$

se $|x-x_0| < r \Rightarrow$ il limite viene $<1 \Rightarrow$ la serie conv. assolutam.

$|x-x_0| > r \Rightarrow$ il limite viene $>1 \Rightarrow$ la serie non converge

2) se $r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = +\infty$.

Voglio provare che $\forall x \in \mathbb{R}$ la serie converge (assolut.)

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-x_0| \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente

3) $r = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 0^+$

Voglio provare che per $x \neq x_0$ la serie non converge.

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-x_0| \underbrace{\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{+\infty} = +\infty > 1$$

La serie non converge

Studiamo la convergenza di $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^k}{e^k\, k^4} \frac{1}{x^{2k}}$ $(x \neq 0)$

Ponendo $y = \dfrac{1}{x^2}$, diventa una serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(k-1)^k}{e^k\, k^4}}}_{= a_k} y^k$$

Uso il criterio della radice

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e \overbrace{\boxed{\sqrt[k]{k^4}}}^{\to 1}}{(k-1)} = 0$$

La serie di potenze in y converge solo per $y=0$,
quindi la serie di partenza converge solo per $\dfrac{1}{x^2} = 0$

(non converge mai)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\log\left(e^{-n} + 1 + n^{-2}\right)}_{a_k} (x+4)^n \qquad x_0 = -4$$

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

$$a_n = \log\left(e^{-n} + 1 + n^{-2}\right) = \log\left(1 + \underbrace{e^{-n} + n^{-2}}_{\downarrow\, 0}\right) \sim e^{-n} + n^{-2} =$$

$$= n^{-2}\left(e^{-n}n^2 + 1\right) \sim n^{-2} = \frac{1}{n^2}$$

$$e^{-n}n^2 \to 0$$

$\boxed{r=1}$ $\Rightarrow$ la serie conv. ass. per $|x+4| < 1$

cioè per $-5 < x < -3$

La serie non conv. per $|x+4| > 1$.

cioè per $(x < -5) \vee (x > -3)$.

$\boxed{x=-3}$ $\Rightarrow (x+4) = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+n^{-2}+e^{-n}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}}$

converge (confr. asint. con $\sum \frac{1}{n^2}$)

$\boxed{x=-5}$ $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+n^{-2}+e^{-n}\right)$

conv. assolut. $\Rightarrow$ converge

La serie converge $\Leftrightarrow$ $-5 \leq x \leq -3$

Serie di Taylor

Sia $f \in C^\infty(a,b)$ sia $x_0 \in (a,b)$.

Posso considerare il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + E_n(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - E_n(x)$$

Mi chiedo cosa succede per $n \to +\infty$

A sinistra abbiamo la somma parziale di una serie.

Tale serie converge a $f(x) \iff \lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$

In tal caso abbiamo provato che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Vediamo il caso $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} = e^x - E_n(x)$$

Fisso $x \in \mathbb{R}$, voglio mostrare che $E_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

OSS il raggio di convergenza della serie vale

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\cancel{k!}}(k+1)\cancel{!} = +\infty$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

c compreso tra 0 e x:

se $x > 0 \quad 0 < c < x \quad e^c \leq e^x$

$x < 0 \quad x < c < 0 \quad e^c \leq 1$

$$|E_n(x)| = e^c \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \max\{1, e^x\} \boxed{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \to 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} E_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

In modo simile si può dimostrare che:

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \forall x \in (-1, 1) \qquad \text{serie geometrica}}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall x \in (-1, 1)}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \qquad \forall x \in (-1, 1]}$$

per $x=1$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \log 2.$

$\arcsin x = \_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_\_ \qquad \forall x \in [-1,1]$

$\operatorname{arctg} x = \ldots \qquad \forall x \in [1, 1]$

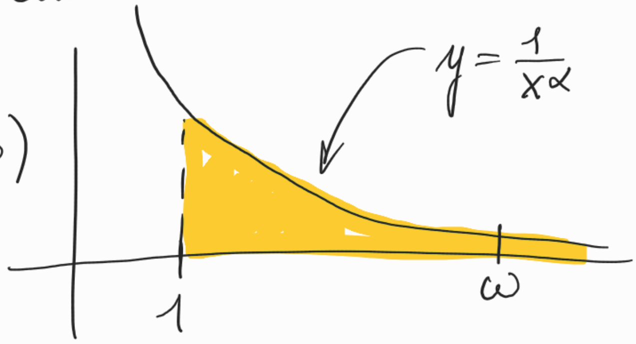
Integrali impropri.

Nell' integrale di Riemann abbiamo sempre supposto:

f limitata in $[a,b]$ limitato

Vogliamo rimuovere queste richieste.

Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha > 0)$



Fisso $\omega > 1$, calcolo $\displaystyle\int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha}$ e poi mando ω a $+\infty$.

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$\int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \, x^{1-\alpha} \Big|_1^{\omega} = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\omega^{1-\alpha} - 1\right] & \alpha \neq 1 \\[2ex] \log x \Big|_1^{\omega} = \log \omega & \alpha = 1 \end{cases}$$

$\alpha \neq 1$

$\boxed{\alpha > 1}$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\Big[\underbrace{\omega^{1-\alpha}}_{\to 0} - 1\Big] = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$\alpha > 1$

$\boxed{\alpha < 1}$ $$\lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}}_{> 0} \underbrace{\Big[\omega^{1-\alpha} - 1\Big]}_{\to +\infty} = +\infty$$

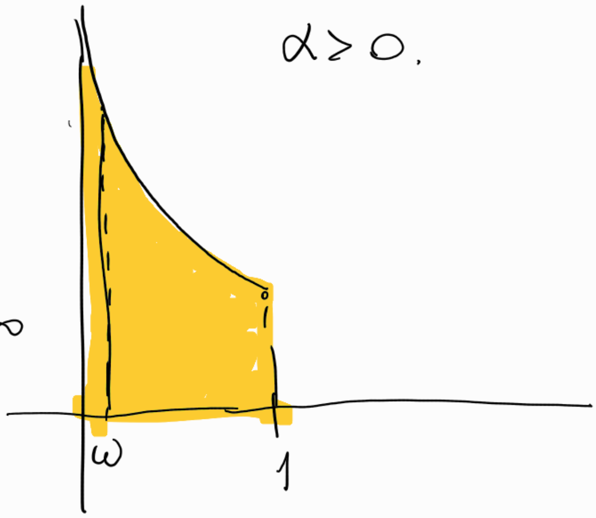
$\boxed{\alpha = 1}$ $$\lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x} = \lim_{\omega \to +\infty} \log \omega = +\infty.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

L'integrale improprio converge se $\alpha > 1$

diverge se $\alpha \leq 1$.

Pb 2. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$ $\alpha > 0$.



Qui l'intervallo è limitato, ma f non lo è vicino a zero

Idea simile a prima:

Fisso $\omega \in (0,1)$, calcolo $\displaystyle\int_\omega^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ e poi faccio il limite per $\omega \to 0^+$

$$\boxed{\alpha \neq 1}$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \int_\omega^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left. x^{1-\alpha} \right|_\omega^1 = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\omega^{1-\alpha}}_{+\infty}\right)}_{-\infty} = \qquad \alpha > 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Caso speciale $\alpha = 1$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \int_\omega^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\omega\to 0^+} (-\log \omega) = +\infty .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

converge per $\alpha < 1$

diverge per $\alpha \geq 1$

Def. di integrale improprio

Integrale improprio "all'estremo destro".

$f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supponiamo che $\forall \omega \in (a,b)$ $f \in R(a,\omega)$

Se esiste $\lim_{\omega \to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx$ (finito o infinito)

diremo che esso è l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$

Esso può essere finito (integrale improprio convergente)
o infinito (" " divergente).

<u>Integrale improprio "all'estremo sinistro"</u>

$f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

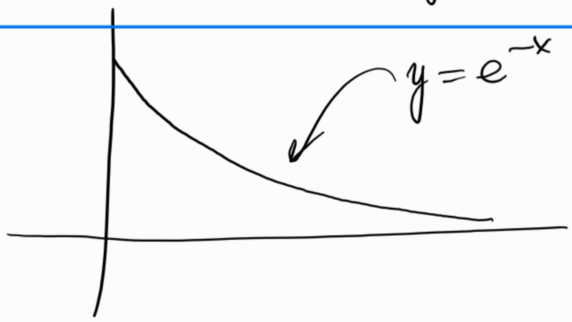
Supponiamo che $\forall \omega \in (a, b)$ $f \in \mathcal{R}(\omega, b)$

<u>Se esiste</u> $\lim\limits_{\omega \to a^+} \int_\omega^b f(x)\,dx$ (finito o infinito)

diremo che esso è l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$

Esso può essere finito (integrale improprio convergente)
o infinito (" " divergente).

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$



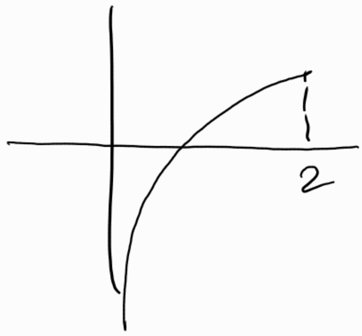
$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_0^\omega e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^\omega = \lim_{\omega \to +\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-\omega}}_{\to 0}\right) = 1$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{\omega \to -\infty} \int_\omega^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega\to -\infty} \left(\cancel{\operatorname{arctg} 0} - \operatorname{arctg} \omega \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^2 \log x \, dx =$$



$$= \lim_{\omega \to 0^+} \int_\omega^2 \log x \, dx =$$

$$\int 1 \log x \, dx = x \log x - \int \frac{x}{x} dx = x(\log x - 1) + c$$

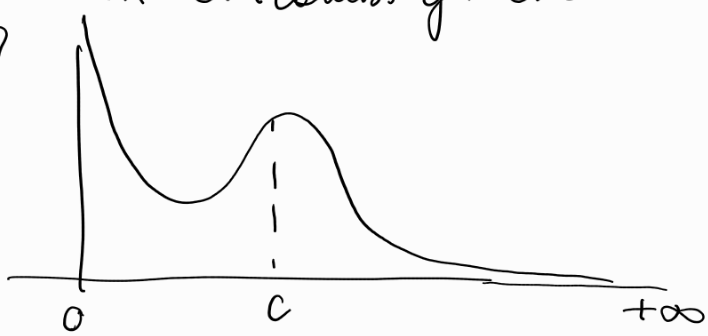
$$= \lim_{\omega \to 0^+} \left[2(\log 2 - 1) - \underbrace{\omega(\log \omega - \cancel{1})}_{\to 0} \right] = 2(\log 2 - 1)$$

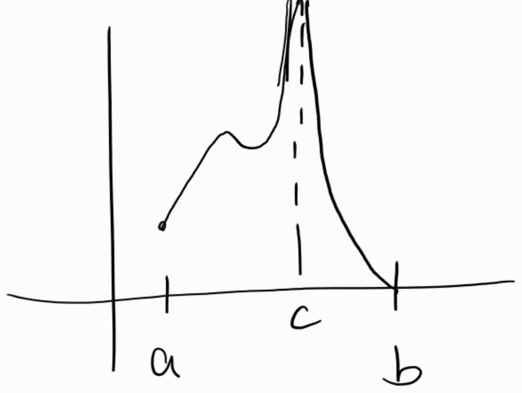
__OSS.__ Se $f \in R(a,b)$, con questa procedura

$$\lim_{\omega \to b^-} \boxed{\int_a^\omega f(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx$$ nel senso di Riemann.

è continua come funzione di ω.

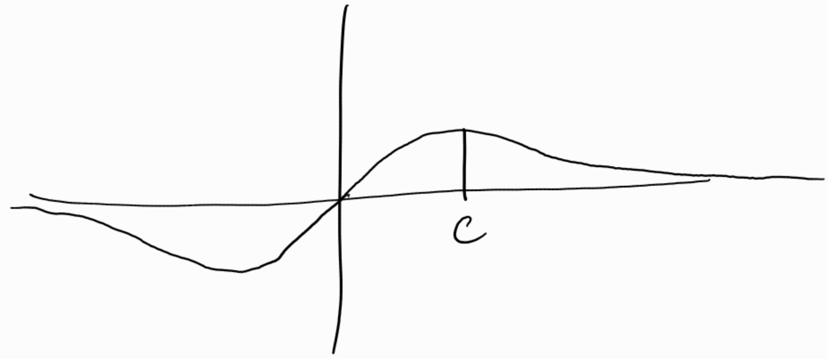
E se f "ha problemi" in entrambi gli estremi oppure in un punto intermedio?





In tal caso si spezza l'intervallo e si studiano i due integrali separatamente: alla fine l'$\int$ converge se entrambi convergono.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$



Pb. in $+\infty$ e $-\infty$

Fisso c compreso tra $-\infty$ e $+\infty$ (per es. $c=0$.

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

per motivi di simmetria saranno ~~uguali~~ opposti

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{0}^{\omega} \frac{2x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2} \log(1+x^2)\Big|_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) = +\infty.$$

Ugualmente $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\infty.$

1) Ovviamente non è la stessa cosa che calcolare

$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{x\,dx}{1+x^2}$$ (che viene sempre zero)

2) La scelta di c $(=0)$ è ininfluente.

A volte siamo interessati a capire il carattere di un integrale improprio senza calcolarlo.

Supponiamo che $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ sia positiva vicino a b.

$$\lim_{\omega \to b^-} \underbrace{\int_a^\omega f(x)\,dx}_{g(\omega)}$$

$g(\omega)$ funzione crescente di ω.

Quindi il limite esiste sempre e coincide con il $\sup\limits_{\omega \in (a,b)} g(\omega)$.

Criterio del confronto.

$f(x), g(x): [a,b) \to \mathbb{R}$. t.c.

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b)$

Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x+x^3+x^8}$$ voglio solo sapere se converge oppure no.

$$f(x) = \frac{1}{5x+x^3+x^8} \leq \frac{1}{x^8} = g(x) \qquad \forall x \in [1,+\infty)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^8} \quad \text{converge} \quad \alpha = 8 > 1.$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x+x^3+x^8} \quad \text{converge.}$$

Da questo si passa al criterio del confronto asintotico

Prop $f(x), g(x) : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0,+\infty)$$

Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$

hanno lo stesso carattere.

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1+x^4}{x^3+x^8}}_{f(x)} dx \qquad f(x) \sim \frac{1}{x^4} \qquad x \to +\infty$$

VI O

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ converge,

anche l nostro integrale converge

Relazioni tra $\int$ impropri e serie.

Teorema Sia $f(x) : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

positiva e decrescente. Allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

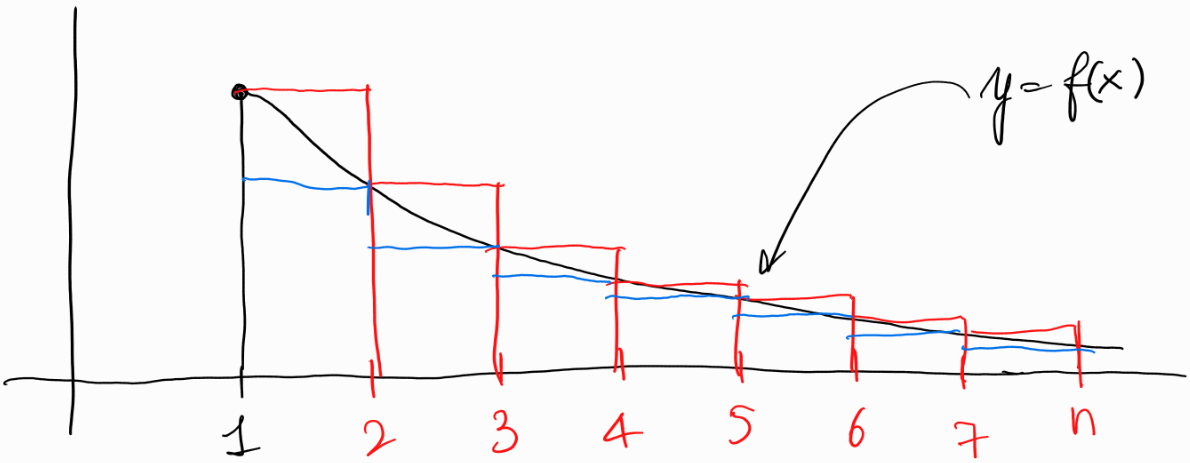
hanno lo stesso carattere (convergenti entrambi o divergenti entrambi).

Applicazione: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$

positiva e decrescente in $[1, +\infty)$.

teorema $\Rightarrow$ $\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{converge se e solo se } \alpha > 1}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ hanno lo stesso carattere

Quindi anche la serie armonica generalizzata converge se e solo $\alpha > 1$.



$$\int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \qquad n \to +\infty$$

$$\int_1^n f(x)\,dx \ge \sum_{k=2}^{n} f(k)$$