Criterio del confronto asintotico.

Siano $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ succ^{ni} a termini positivi. (almeno def^{te})
Supponiamo che $\exists \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in [0,+\infty]$. Allora

- Se $\ell \in (0,+\infty)$, allora le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere (entrambe convergenti o entrambe divergenti)

Dim Se $\frac{a_k}{b_k} \to \ell \in (0,+\infty)$,

abbiamo che $\frac{\ell}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}\ell$ def^{te}

cioè

$$\frac{\ell}{2} b_k < a_k < \frac{3}{2}\ell\, b_k$$

Se $\sum_k b_k$ converge, anche $\sum_k \frac{3}{2}\ell\, b_k$ converge, e quindi, per confronto, anche $\sum_k a_k$ converge

Se $\sum_k b_k$ diverge, anche $\sum_k \frac{\ell}{2} b_k$ diverge, quindi per il teor. del confronto anche $\sum_k a_k$ diverge $\square$

- Se $\ell = +\infty$

se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.

se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Dim

Se $\ell = +\infty$, cioè $\frac{a_k}{b_k} \to +\infty$, si avrà

$\frac{a_k}{b_k} > 1$ def^{te}, cioè $a_k > b_k$ def^{te}.

- Se $\ell = 0$, vale lo stesso risultato visto per $\ell = +\infty$ ma a ruoli scambiati

Esempio Studiare il carattere di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+7}{3k-k^2+4k^4}$$

a_k

$$a_k \sim \frac{1}{4k^3} \iff \frac{a_k}{1/k^3} \to \frac{1}{4}$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{k^3}$ converge, anche la nostra serie converge.
Poiché $a_k \sim \frac{1}{4k^3}$, abbiamo anche verificato che a_k è def^{te} positiva.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+7}{3k-k^2-4k^4}$$

a_k

$a_k \sim -\frac{1}{4k^3}$ quindi a_k è def^{te} negativa.

$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)$ è a segni def^{te} positivi, e

$-a_k \sim \frac{1}{4k^3}$, quindi converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\boxed{(k+5)\sin\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right)}}_{a_k}$$

$$a_k = \underbrace{(k+5)}_{\sim k}\sin\underbrace{\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right)}_{\sim \frac{2}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{2}{k^2}} \sim k\cdot\frac{2}{k^2} = \frac{2}{k}$$

$$\frac{2}{k^2+\sqrt{k}} \to 0$$

Quindi la Σ diverge per confr. asintotico con la serie armon.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}_{\sim \frac{1}{n^\alpha}}\right) \qquad \alpha > 0$$

1) Se $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\overbrace{\left(1 - \underbrace{\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{n^\alpha}}_{\sim n^{1/2-\alpha} \to 0}\right)}^{\to 1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow$ serie def^{te} a termini positivi.

diverge a $+\infty$ per confr. asint. con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

- se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim -\frac{1}{n^\alpha}$$

$\Rightarrow$ la serie è def^{te} a termini negativi

Per confr. con la serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, la nostra serie diverge a $-\infty$

- se $\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{a_n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) =$$

$$\left[\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad t \to 0\right]$$

$$= \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$ def^{te} positiva.
e la serie converge per confr. asint. con $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n\right)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n = 2n\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{8n^2}} - 1\right)}_{\sim \frac{3}{3\cdot 8n^2} = \frac{1}{8n^2}} \sim \frac{2n}{8n^2} = \frac{1}{4n}$$

$$\sqrt[3]{1+t} - 1 \sim \frac{t}{3} \quad \text{per} \quad t \to 0$$

$$a_n = \left(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n\right)^\alpha \sim \left(\frac{1}{4n}\right)^\alpha \sim \underbrace{\frac{1}{4^\alpha}}_{= c} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

Per confr. asintotico la serie converge per $\alpha > 1$
diverge per $\alpha \leq 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log(1+k)}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{(1/k^2)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}\log(1+k)} = 0$$

Poiché la serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$ converge, anche la nostra serie converge per il confronto asintotico (3° caso)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log(1+k)}{k^2}}_{a_k}$$

Per la convergenza, questa serie è "un po' peggio" di $\frac{1}{k^2}$, ma "di poco". Confr. asintotico con $\frac{1}{k^{3/2}}$

$$\frac{a_k}{(1/k^{3/2})} = \frac{k^{3/2} \log(1+k)}{k^2} = \frac{\log(1+k)}{k^{1/2}} \sim \frac{\log k}{k^{1/2}} \to 0$$

$$\log(1+k) = \log\left(k\left(\frac{1}{k}+1\right)\right) = \underbrace{\log k}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\downarrow\, 0} \sim \log k.$$

Poiché $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge (serie armonica gen. con $\alpha = 3/2 > 1$) anche $\sum a_k$ converge.

Ricordate il criterio del rapporto per successioni positive?

" se $\{a_k\}$ è una succ^{ne} di numeri positivi,

Supponiamo che $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$

1) se $\ell \in [0,1)$, $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

2) se $\ell \in (1,+\infty]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ "

Esiste una versione per le serie a termini positivi, che "contiene" anche il risultato appena enunciato.

CRITERIO del rapporto per serie

Sia $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie a termini def^{te} positivi, supponiamo che $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$. Allora:

1) se $\ell \in [0,1)$, allora la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

(in particolare, per la C.N., $a_k \to 0$)

2) se $\ell \in (1,+\infty]$, allora $a_k \to +\infty$ e quindi la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

dim. 1) $\ell \in [0,1)$ $\qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell$.

Prendo M t.c. $\ell < M < 1$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < M < 1 \quad \text{def}^{te}$$

$$a_{k+1} < M a_k \quad \text{def}^{te}$$

$\Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq k_0 \quad a_{k+1} < M a_k$.

Prendiamo $k > k_0$

$$a_k < M \underbrace{a_{k-1}}_{\wedge\, M a_{k-2}} < M^2 a_{k-2} < M^3 a_{k-3} < \dots < M^{k-k_0} a_{k_0}$$

$\boxed{\forall k > k_0}$ $\quad a_k < M^{k-k_0} a_{k_0} = M^k \dfrac{a_{k_0}}{M^{k_0}} = c\, M^k$

$\dfrac{a_{k_0}}{M^{k_0}} = c$

Poiché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ converge (serie geometrica con ragione $0<M<1$)

anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2) se $\ell \in (1, +\infty]$ $\quad \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell$.

Fisso un valore M t.c. $1 < M < \ell$, allora

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > M \quad \text{def}^{te} \quad \text{(permanenza del segno)}$$

$\Rightarrow \quad a_{k+1} > M a_k \quad \text{def}^{te}$.

ragionando come prima si dimostra.

$$a_k > c\, M^k \qquad \text{def}^{te}$$

$M > 1 \Rightarrow M^k \to +\infty \Rightarrow a_k \to +\infty$

e quindi la serie non può convergere. $\square$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

$\dfrac{2^k}{k!} = a_k > 0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{\cancel{k+1}}}{(k+1)\cancel{!}} \, \frac{\cancel{k!}}{\cancel{2^k}} = \frac{2}{k+1} \to 0 < 1.$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Similmente, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge

<u>Attenzione</u> Questo criterio funziona solo se

$a_k \to +\infty$ esponenzialmente (almeno)

oppure

$a_k \to 0$ esponenzialmente (almeno)

Nei casi in cui a_k va come una potenza, logaritmo, etc.

$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ e quindi il teorema non dice nulla

---

C'è un criterio "gemello" di quello del rapporto.

<u>Criterio della radice</u>

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie a termini def^{te} positivi

Supponiamo che $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$.

Allora: stesse conclusioni del criterio del rapporto.

- Se $\ell \in [0,1) \Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge
- Se $\ell \in (1,+\infty] \Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Cenno alla dim.

se $\sqrt[k]{a_k} \to \ell < 1$, come prima scelgo M t.c. $\ell < M < 1$

$\Rightarrow$ def^{te} $\sqrt[k]{a_k} < M \Rightarrow$ def^{te} $a_k < M^k \Rightarrow$ stessa conclusione del precedente teorema.

Similmente per $l>1$.

OSS Si può dimostrare che $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$, se i due limiti esistono.

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^3}}$ a_n

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^3}}} = \frac{n}{2^{n^2}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

I criteri del rapporto e della radice si possono usare insieme a confronto e confr. asintotico.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\log k + 3k^2e^k}{4^{k+2} - k^3}$$

$= a_k$

$$a_k = \frac{k\log k + 3k^2e^k}{4^{k+2} - k^3} \sim \frac{3k^2e^k}{4^{k+2}}$$

$\sim 3k^2e^k$ $\sim 4^{k+2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2e^k}{4^{k+2}}$,

a cui applico il criterio della radice.

$$\sqrt[k]{\frac{3k^2e^k}{4^{k+2}}} = \frac{\sqrt[k]{3k^2}\,e}{4^{\frac{k+2}{k}}} \to \frac{e}{4} < 1$$

$\sqrt[k]{3k^2} = e^{\frac{1}{k}\log(3k^2)} \to 1$

$4^{\frac{k+2}{k}} \to 4$

$\Rightarrow$ La serie converge

Restano da studiare le serie non definitivamente a segno costante, per es.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Serie a termini di segno non def^{te} costante.

A queste serie non si possono applicare direttamente i criteri del confronto/confronto asintotico.

Continua a valere la C.N:

$$\text{se } a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{non converge}$$

DEF Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie. Si dice che essa **converge assolutamente** se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

TEOREMA (criterio della convergenza assoluta).

Se una serie converge assolutamente, allora converge "semplicemente".

Inoltre vale la **dis. triangolare per serie.**

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3}$

Studio la conv. assoluta. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k^2)|}{k^2+3}$

Questa è una serie a termini ≥ 0, quindi posso applicare il confronto

$$\frac{|\sin(k^2)|}{k^2+3} \le \frac{1}{k^2+3} \le \frac{1}{k^2}$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{k^2}$,

la serie $\sum \frac{|\sin(k^2)|}{k^2+3}$ converge.

quindi la serie di partenza converge assolutamente $\Rightarrow$ converge.

<u>Dim teorema</u> supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converga.

Consideriamo la seguente serie (a termini non negativi)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)$$

A questa serie voglio applicare il teor. del confronto

$$0 \le |a_k| \underbrace{- a_k}_{\le |a_k|} \le |a_k| + |a_k| = \underline{2|a_k|}$$

Poiché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2|a_k|$ converge per ipotesi, anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k) \text{ converge.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underline{|a_k|} + \underline{(a_k - |a_k|)} \right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)}_{\text{converge}}$$

Quindi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Proviamo la dis. triangolare: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{ovvia perché sono un numero finito di addendi}$$

Faccio $n \to +\infty$ (sapendo che le serie convergono)

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \qquad \square$$

Abbiamo visto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

Il viceversa in generale non vale.

Esistono serie che convergono semplicemente ma non assolutamente.

Vedremo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

ma la serie dei valori assoluti $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2}\Big(\underbrace{\sin(e^k)+2\cos(k^2)}_{\text{segno irregolare}}\Big)}^{a_k}$$

Studiamo la conv. assoluta

$$|a_k| = \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2} \underbrace{\left|\sin(e^k)+2\cos(k^2)\right|}_{\leq\ |\sin(e^k)| + 2|\cos(k^2)| \leq 1+2=3} \leq$$

$$\leq 3 \quad \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2}, \text{ la cui serie converge}$$

perché $3 \cdot \frac{(3k^2+2)}{k^{7/2}+5k^2} \sim \frac{3 \cdot 3k^2}{k^{7/2}} = \frac{9}{k^{3/2}}$

e la serie $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge.

Valgono i <u>criteri di rapporto e radice per serie a segni qualsiasi</u>.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie numerica t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell \quad \left(\text{risp. } \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell\right)$$

($a_k \neq 0$ def^{te})

<u>Allora:</u>

1) se $\ell \in [0,1)$, per il criterio di rapporto/radice applicato alla serie dei valori assoluti, la serie converge assolutamente, quindi converge.

2) se $\ell \in (1,+\infty]$, per il criterio di rapporto/radice $|a_k| \to +\infty$, e quindi $a_k \not\to 0$, quindi è violata la C.N. per la convergenza $\Rightarrow$ la serie non converge.

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k}}_{a_k} \qquad \text{al variare del parametro } x \in \mathbb{R}.$$

Il caso $x=0$ è banale (termini tutti nulli)

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{k+1} \frac{k}{|x|^k} = \frac{k}{k+1}|x| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x|$$

- se $|x|<1$, la serie converge assolut., quindi semplicem.
- se $|x|>1$, la serie non converge

- se $|x| = 1$, cioè $x = \pm 1$, il criterio non dice nulla.

$x = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (serie armonica)

$x = -1$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge (da vedere domani).