Domani lezione 15:00 → 18:00 (Aula 15)

ore 18:00 Brindisi (portare panettoni etc..)

Giovedì lezione 14:30 → 17:30 (18:30)

Venerdì forse lezione su Zoom.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serie

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ somme parziali

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è:

- **convergente** se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ somma della serie
- **divergente a $+\infty$ $(-\infty)$** se $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \ (-\infty)$
- **irregolare** se $\lim_{n\to+\infty} S_n \not\exists$

Serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ $(r \in \mathbb{R})$.

TEOREMA

La serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ è:

- convergente $\iff$ $|r| < 1$, e in questo caso $S = \frac{1}{1-r}$
- divergente a $+\infty$ $\iff$ $r \geq 1$
- indeterminata $\iff$ $r \leq -1$.

DIM. Troviamo una formula per S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n \overset{?}{=} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \forall r \neq 1$$

questo equivale a $\underbrace{(1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n)}_{\parallel} \overset{?}{=} 1-r^{n+1}$

$$\begin{aligned}&1+\cancel{r}+\cancel{r^2}+\cancel{\dots\dots} \quad +\cancel{r^n} \\ &-\cancel{r}-\cancel{r^2}-\cancel{r^3} \quad -\cancel{r^n}-r^{n+1} = 1-r^{n+1}\end{aligned}$$

Nel caso $r=1$ $\quad S_n=\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1.$

Riassumendo: $\quad S_n = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r\neq 1 \\ n+1 & \text{se } r=1. \end{cases}$

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} S_n$

$|r|<1 \Rightarrow r^{n+1} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow S_n \xrightarrow{n} \frac{1}{1-r}$

$r>1 \Rightarrow r^{n+1} \xrightarrow{n} +\infty \Rightarrow S_n \xrightarrow{n} +\infty$

$r=1 \Rightarrow S_n = n+1 \longrightarrow +\infty$

$r\leq -1 \Rightarrow r^{n+1}$ non ha limite $\Rightarrow 1-r^{n+1}$ non ha limite

$\Rightarrow S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ non ha limite. $\square$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$0,\overline{3} = \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k} \quad \xrightarrow{n\to+\infty} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^k} = 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k} = 3\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow}$$

$$= 3\left(\frac{10}{9}-1\right) = 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

In breve quel che abbiamo fatto è:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{\overset{h}{\overset{\shortparallel}{k-1}}} =$$

$$= \frac{3}{10}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^h = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,23\overline{47} = \frac{23}{100} + \frac{47}{10000} + \frac{47}{1000000} + \cdots =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10^4} + \frac{47}{10^6} + \frac{47}{10^8} + \cdots =$$

$$= \frac{23}{100} + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{47}{10^{2k}} = \frac{23}{100} + 47\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10^4}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{k-2} \qquad k-2=h$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10000}\boxed{\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^h} =$$

$$\shortparallel \quad \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{100\cancel{00}}\cdot\frac{\cancel{100}}{99} = \frac{23}{100} + \frac{47}{9900}$$

$$0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k} = \frac{9}{10}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{10^h} = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9} = 1$$

$$0,24\overline{9} = \ldots = 0,25$$

Proprietà elementari delle serie:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergono, allora $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k)$ converge e ~~la~~ la sua somma vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

linearità delle serie

Dim. si scrive la formula per le somme parziali e poi si manda n a $+\infty$

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k \begin{cases} +\infty & \text{se } \lambda > 0 \\ 0 & \lambda = 0 \\ -\infty & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Serie di Mèngoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

OSS $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

E' un esempio di "serie telescopica"

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$$

Nel caso precedente $b_k = \frac{1}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \dots$$

$$+ (\cancel{b_n} - b_{n+1}) =$$

$$= b_0 - b_{n+1}$$

Abbiamo dedotto che:

Una serie telescopica $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ converge se e solo se $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esiste finito, e in tal caso

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\underbrace{\log k}_{b_k} - \underbrace{\log(k+1)}_{b_{k+1}} \big)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\log k - \log(k+1)\right] = \underbrace{\log 1}_{=0} - \log(n+1) \to -\infty$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\infty}$$

OSS In generale non è possibile trovare formule semplici per calcolare $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ per n generico.

Ci si accontenta spesso di criteri per capire il carattere della serie

C.N. (cond. necessaria) per la convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Dim. $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

$$S_{n-1} + a_n = S_n \Rightarrow \boxed{a_n = \underbrace{S_n}_{\to S} - \underbrace{S_{n-1}}_{\to S}} \to S - S = 0$$

Se la serie converge $S_n \to S \in \mathbb{R}$ $\square$

OSS è una C.N. ma non sufficiente
Esistono serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ t.c. $a_k \to 0$ per $k \to +\infty$ ma la serie non converge

Esempio 1 già visto.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\log\left(\frac{k}{k+1}\right)}_{a_k \to \log 1 = 0}$$

ma abbiamo visto che la serie diverge a $-\infty$.

Esempio 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ per $k \to +\infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{1}_{\substack{\vee\!/ \\ 1/\sqrt{n}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\substack{\vee\!/ \\ 1/\sqrt{n}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\substack{\vee\!/ \\ 1/\sqrt{n}}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}_{\substack{\vee\!/ \\ 1/\sqrt{n}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\substack{\parallel \\ 1/\sqrt{n}}} \geq$$

$$\geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Per confronto $S_n \to +\infty$. (la serie diverge)

Come si usa questo criterio? in negativo, per provare che una data serie non converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k}{1-4k^2}$$

$a_k \to -\frac{1}{4}$ Quindi la serie non converge

OSS se $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$, questo non ci dice nulla sul carattere della serie.

Se abbiamo una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, e modifico un numero finito (anche grande) di elementi, il carattere della serie resta immutato. Infatti, se per esempio modifico solo termini tra i primi N termini. $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k$ t.c. $a_k = \tilde{a}_k \ \forall k > N$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \qquad \text{per } n > N$$

$$S_n - \tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - \tilde{a}_k) = \sum_{k=0}^{N} (a_k - \tilde{a}_k) = \text{costante}$$

(quindi hanno lo stesso carattere)

Quindi tutti i criteri sul carattere di una serie dipendono solo dal comportamento di a_k "definitivamente"

Serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{con} \quad a_k \geq 0$$

se $a_k \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{S_n \text{ è crescente}}$

Infatti $S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$

se $\{S_n\}$ è crescente, esiste sempre il limite e coincide con $\sup S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sup S_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \{S_n\} \text{ è illimitata sup.} \\ S \in \mathbb{R} & \text{se } \{S_n\} \text{ è limitata sup} \end{cases}$$

TEOREMA Una serie a termini (definitivamente) ≥ 0 può solo essere:

- convergente se le S_n sono limitate superiormente
- divergente a $+\infty$ se le S_n non sono limitate superiormente

Applicazione: Serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Proveremo che la successione S_n è illimitata sup $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la serie diverge

$S_1 = 1$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = \underbrace{S_2}_{\substack{= \\ 3/2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\geq \\ 1/4}} + \frac{1}{4}}_{\substack{\geq \\ 1/2}} \geq 2$$

$$S_8 = \underbrace{S_4}_{\substack{\geq \\ 2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\substack{\geq \\ 4 \cdot \frac{1}{8} = 1/2}} \geq \frac{5}{2}.$$

$$S_{16} = \underbrace{S_8}_{\substack{\geq \\ \frac{5}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}}_{\substack{\geq \\ 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}}} \geq 3$$

$$S_{32} = \dots \geq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

si trova

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow S_n \text{ è illimitata sup.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ due succ^{ni} t.c.

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(basta che questa condizione sia vera definitivamente)

Allora:

- se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

- se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

Dim chiamo $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $\quad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Per l'ipotesi $\quad s_n \leq t_n \quad \forall n$

1) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ t_n limitata superiormente $\overset{t_n \geq s_n}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ s_n limitata superiormente $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge

perché, se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergesse, per il punto 1) anche

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergerebbe (assurdo!) $\square$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\log k}{k}$$

OSS $\quad \frac{\log k}{k} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 3$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k}$ diverge.

---

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$ $\quad$ OSS $\quad \frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge (serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \text{ converge.}$$

(e inoltre $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Per una serie definitivamente a termini positivi, per verificare la sua convergenza/divergenza bisogna capire "quanto velocemente" i termini della serie vanno a zero.

Per fare confronti, sono particolarmente utili:

- la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k \qquad r>0$.
- la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Questa serie: $\begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Dim. per $\underline{\alpha \leq 1}$. confronto con il caso $\alpha = 1$

$\alpha \leq 1$

OSS se $\alpha \leq 0$ è violata la C.N.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{k} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge} \end{array}\right| \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ diverge}$$

$\underline{\alpha = 2}$. confronto con la serie di Mengoli $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

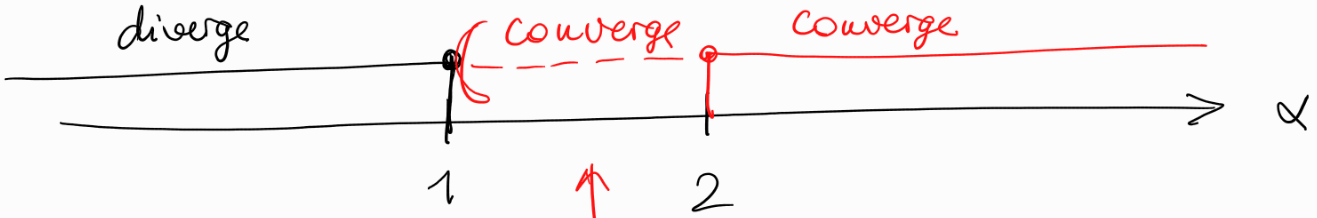
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} \Longleftrightarrow \frac{\cancel{k}(k+1)}{k^{\cancel{2}}} \leq 2$$

$$\iff 1+\frac{1}{k} \le 2 \qquad \text{vera } \forall k \ge 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge}$$

se $\alpha > 2$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{k^\alpha} \le \dfrac{1}{k^2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge} \end{cases}\right| \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge}$$



in questa regione lo proveremo con altri metodi.

Esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+7}{3k-k^2+4k^4}$$

$$a_k = \frac{k+7}{3k-k^2+4k^4} \sim \frac{1}{4k^3} \qquad \text{per } k \to +\infty$$

Vorrei fare il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ (convergente)

$a_k \le \frac{1}{k^3}$ definitivamente?

equivale a $\quad a_k k^3 \le 1$ definitivamente? sì.

$$a_k k^3 \to 1/4$$

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

$a_k \sim \frac{1}{4k^3}$

e se fosse stato $a_k \sim \frac{4}{k^3}$?

avrei potuto confrontare con $\frac{5}{k^3}$

$$\left.\begin{cases} a_k \le \frac{5}{k^3} \text{ definitivamente} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^3} \text{ converge} \end{cases}\right| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

Riassumendo: se $a_k \sim \frac{c}{k^\alpha}$ con $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$