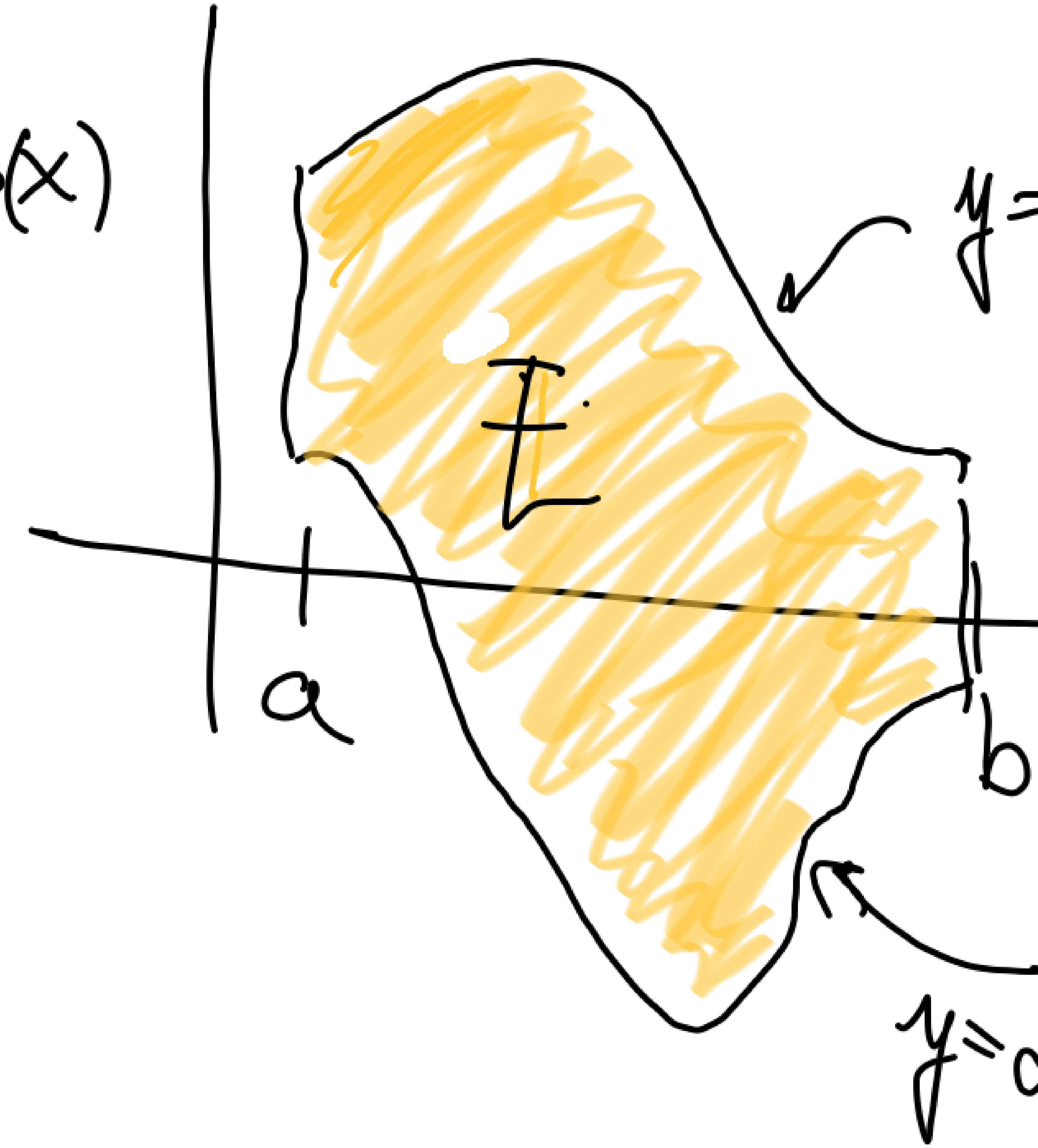
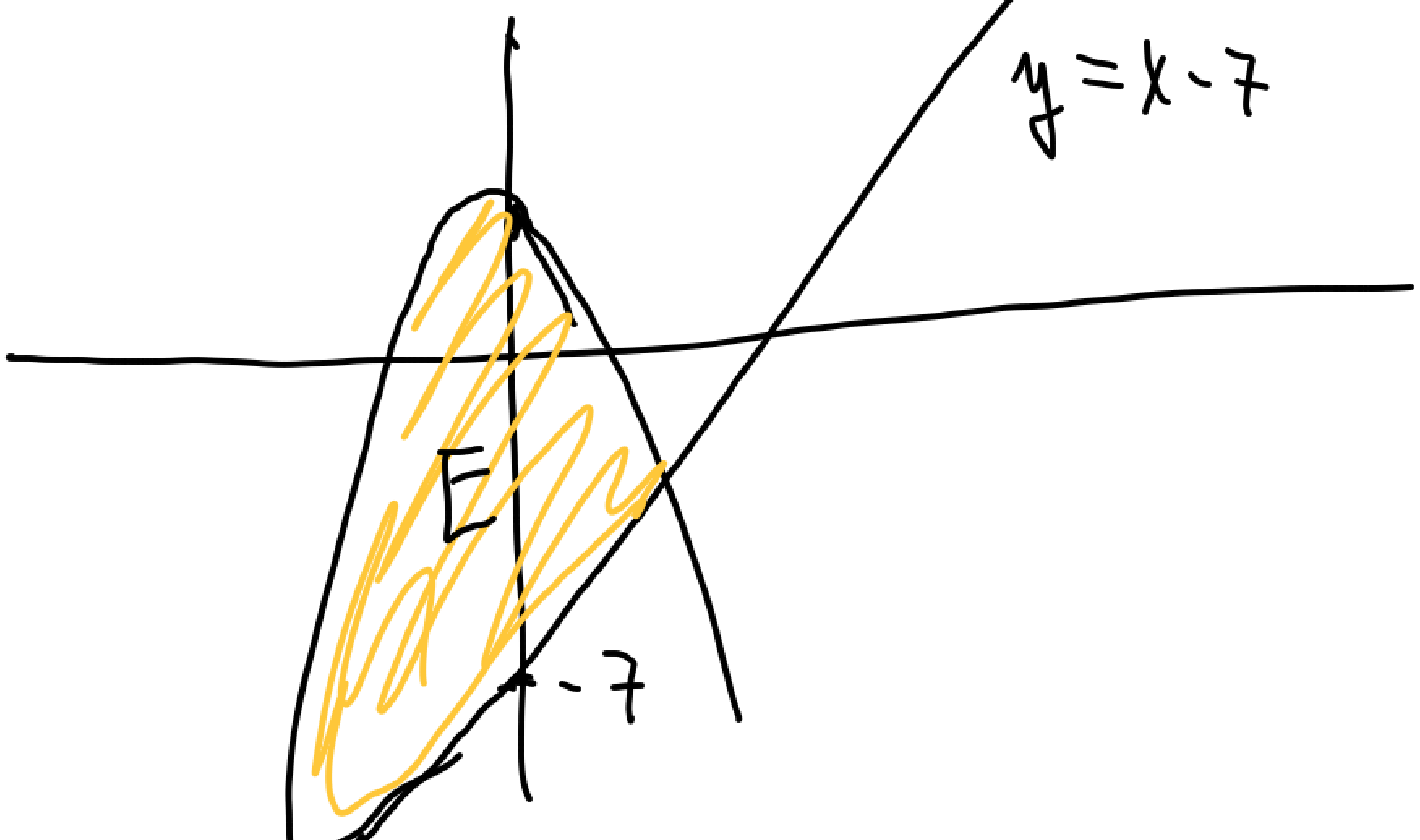
La stessa formula $\text{Area } E = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\,dx$ vale anche se α, β hanno segno qualsiasi, perché $\alpha(x) \leq \beta(x)$



Calcolare l'area di

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-7 \leq 2-3x^2-5x\}$$



$$E=\left\{(x,y):\ \underset{\alpha(x)}{x-7}\le y\le \underset{\beta(x)}{2-3x^2-5x}\right\}$$

La x varia nell'insieme dove $\alpha(x)\le\beta(x)$, cioè

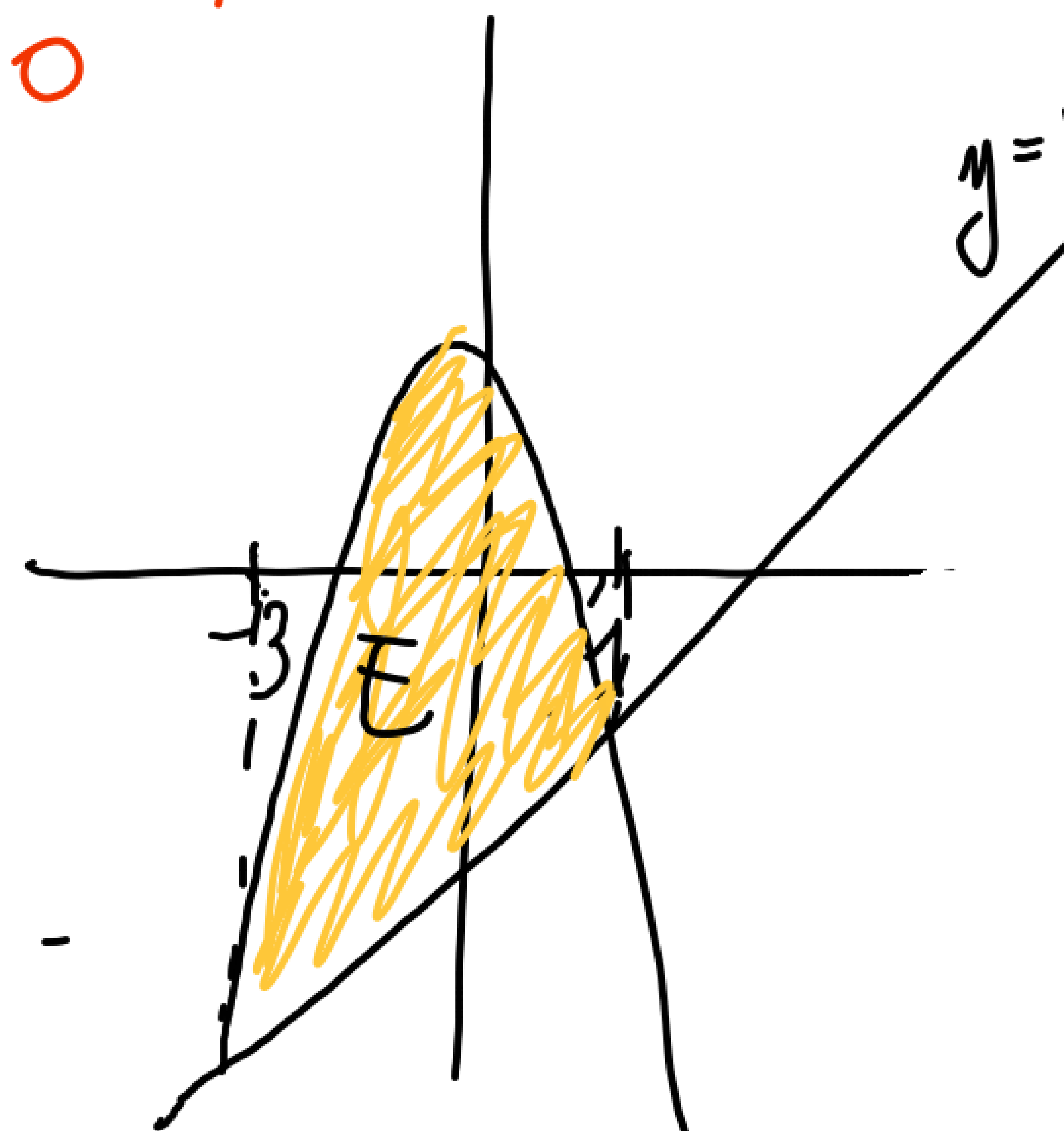
$x-7\le 2-3x^2-5x$, cioè $\quad 3x^2+6x-9\le 0$, cioè

$$x^2+2x-3\le 0$$

$$-3\le x\le 1$$

Ora E si scrive come insieme normale

$$E=\{(x,y): -3\le x\le 1,\ x-7\le y\le 2-3x^2-5x\}$$



$$\text{Area } E = \int_{-3}^{1} \left[(2-3x^2-5x)-(x-7)\right] dx = \int_{-3}^{1} (-3x^2-6x+9)\, dx =$$

$$= \left(-x^3-3x^2+9x\right)\Big|_{-3}^{1} = -1-\cancel{27}-3+\cancel{27}+9\cdot 4 = 32$$

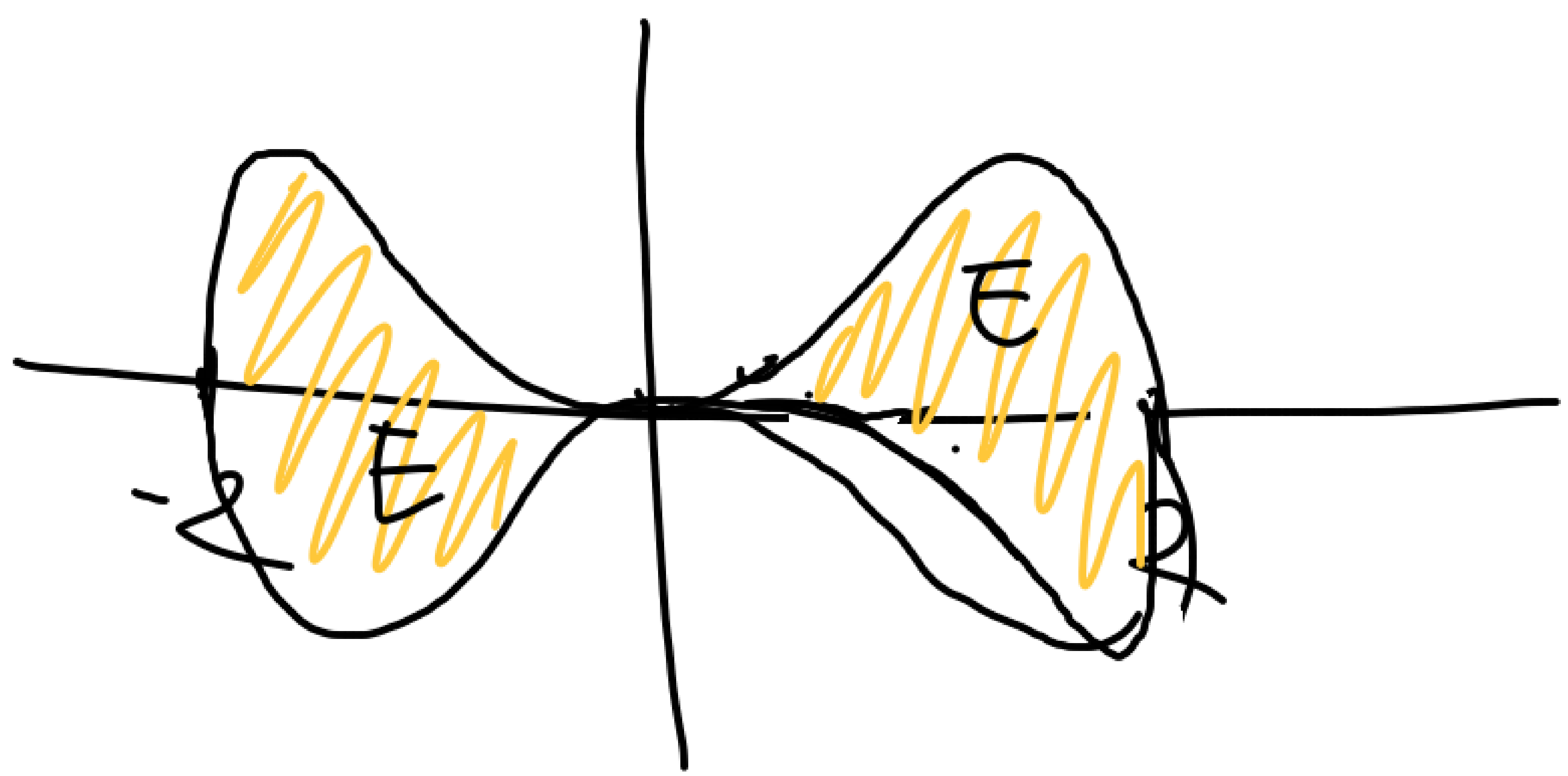
$x-7$

Calcolare l'area di $E=\{(x,y):\ y^4\le x^{12}(16-x^4)\}=$

$$=\left\{(x,y): -\sqrt[4]{x^{12}(16-x^4)}\le y\le \sqrt[4]{x^{12}(16-x^4)}\right\}$$

(deve essere $16-x^4\ge 0 \iff -2\le x\le 2$.)

$$=\left\{(x,y): -2\le x\le 2,\ -|x|^3\sqrt[4]{16-x^4}\le y\le \underbrace{|x|^3\sqrt[4]{16-x^4}}_{g(x)}\right\}$$



$$\text{Area } E=\int_{-2}^{2}\left(g(x)-(-g(x))\right)d$$

$$= \int_{-2}^{2} 2g(x)dx = 4\int_{0}^{2} g(x)dx = 4\int_{0}^{2} x^3 \sqrt[4]{16-x^4}\, dx =$$

$16-x^4=t$

$-4x^3 dx = dt$

$x=0 \Rightarrow t=16$

$x=2 \Rightarrow t=0$

$$= \int_{0}^{16} \sqrt[4]{t}\, dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_{0}^{16} = \frac{4}{5} 2^5 = \frac{128}{5}$$

$x=$

Studio di funzioni integrali:

$h(x) = \int_0^x \cos(t^3)\,dt$ L'integrale non si calcola esplicitamente.

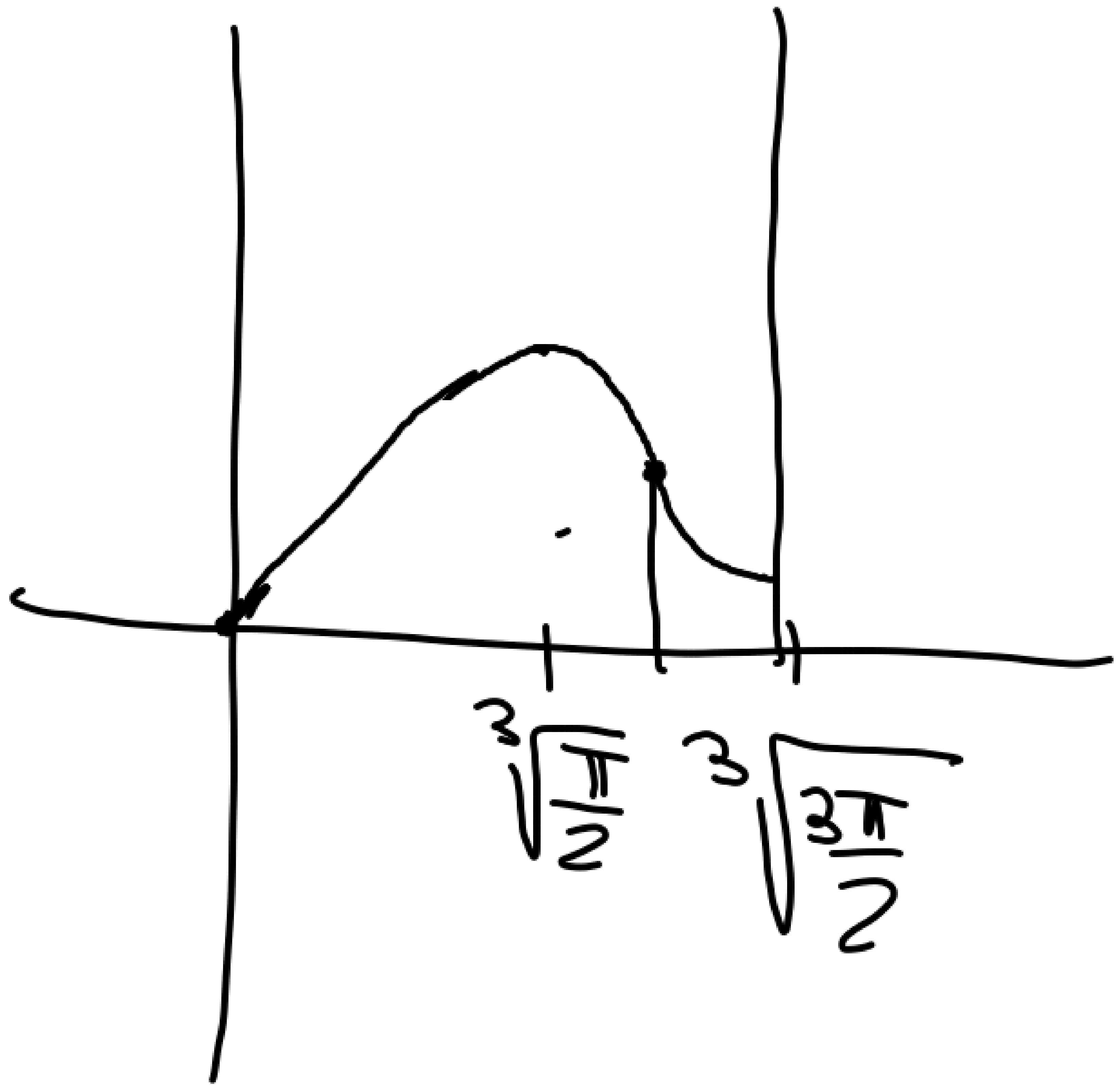
$h(0)=0$ $h'(x) = \cos(x^3) = 0 \iff x^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}$

Studiamo h in $\left[0, \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}\right]$ $h'(x)=0 \iff \left(x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right) \vee \left(x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}\right)$.

$h'(x)>0 \iff \cos(x^3)>0 \iff 0<x^3<\frac{\pi}{2} \iff 0<x<\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

$\text{—} <0 \iff \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$

$x=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ pto di max assoluto, $x=0$ e $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}$ sono pti di min. rel



$$h''(x) = (\cos(x^3))' = -3(x^2)\sin(x^3) = 0 \iff$$

$$(x=0) \vee (x = \sqrt[3]{\pi})$$

Trovare la derivata di:

$$f(x)=\int_{2x+1}^{\sin x} \underbrace{\sqrt[3]{2s^2+1}}_{g(s)}\, ds = \int_{2x+1}^{0} g(s)\,ds + \int_{0}^{\sin x} g(s)\,ds$$

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sin x} g(s)\,ds = ?$$ Se consideriamo $F(x)=\int_0^x g(s)\,ds \Rightarrow F'(x)=g(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(F(\sin x)\right) = F'(\sin x)\cos x = g(\sin x)\cos x = \sqrt[3]{2\sin^2 x+1}\,\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\int_{2x+1}^{0} g(s)\,ds = \frac{d}{dx}\left(-\int_{0}^{2x+1} g(s)\,ds\right) = -\frac{d}{dx}\left(F(2x+1)\right) = -g(2x+1)\,2 =$$

$$= -2\sqrt[3]{2(2x+1)^2+1}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{2\sin^2 x + 1}\,\cos x - 2\sqrt[3]{2(2x+1)^2 + 1}$$

Più in generale, abbiamo provato che: se g è continua in I intervallo, e $\alpha(x); \beta(x) : J \to I$ derivabili. Posto

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(s)\,ds \Rightarrow f'(x) = g(\beta(x))\beta'(x) - g(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Serie numeriche (somme infinite)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \qquad = +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \qquad = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \qquad = 0,\overline{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \qquad = e$$

in che senso?

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è una somma formale di infiniti termini a_k, dove $\{a_k\}$ è una successione assegnata.

Si definisce la successione delle somme parziali

$$\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k =} \; a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Def Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} di numeri reali.

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice

- convergente se la succ^{ne} $\{S_n\}$ delle somme parziali converge a un numero reale S. $\left(\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}\right)$

In tal caso S si dice somma della serie e si scrive

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- La serie si dice divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \text{ oppure } -\infty$$

- La serie si dice irregolare se $\{S_n\}$ non ha limite.

Il "carattere" di una serie è la proprietà di essere divergente/convergente/irregolare

Esempio Serie geometrica

Sia $r \in \mathbb{R}$ fissato. Studiamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

serie geometrica di ragione r

t/ **Teorema** La serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$:

- è convergente $\Leftrightarrow |r| < 1$. In tal caso $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$
- è divergente a $+\infty \Leftrightarrow r \geq 1$.
- è irregolare $\Leftrightarrow r \leq -1$