

Domani lezione Analisi 11:00 → 14:00

Gli argomenti di questa settimana non saranno oggetto della prova scritta dell'11 gennaio. Tuttavia fanno parte del programma e potranno essere richiesti nella prova di teoria e nei successivi appelli.

Complementi sull'integrazione

Attenzione alle sostituzioni:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^0 \frac{t^3}{1+t^2} dt = 0$$

ms

sost. $\sin x = t$
 $\cos x dx = dt$

Corretto.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2x) \, dx$$

Ma si potrebbe anche tentare di fare così: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^0 \frac{t^2}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Errato!

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=\pi \Rightarrow t=0$$

Errato perché $\operatorname{tg} x = \varphi(x)$ non è definita
in $x = \frac{\pi}{2}$.

Se volessimo usare questa sostituzione dovremmo spezzare l' $\int$.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx =$$

$t = \tan x$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Oss per $x = \frac{\pi}{2}$ $\tan x$ non è definita
però per $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ $\tan x \rightarrow +\infty$

Inteso come $2 \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ (Integrale improprio)

Calcolo di aree

Considero insiemi "normali" rispetto a un asse.

Insieme normale risp. all'asse x :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Dove $\alpha(x), \beta(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a, b]$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{R}(a, b)$$

$$\Rightarrow \text{Area } E = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx$$



