Integrazione per sostituzione

Si basa sulla formula di derivazione di funzione composta.

I, J intervalli

$\varphi : I \to J$ di classe $C^1(I)$ (cioè derivabile con derivata continua)

f continua in J

se F è una primitiva di f, cioè $F'(s) = f(s)$ $\forall s \in J$

allora considero la funzione composta $F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t))$ $\forall t \in I$

e si ha

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Riassumendo: Se F è una primitiva di f in J,

allora $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t))$ è una primitiva di

$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ in I

Quindi, per calcolare una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ basta trovare una primitiva di f e calcolarla in $\varphi(t)$

Usando gli integrali indefiniti, questo si scrive così

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left(\int f(s)\,ds\right)_{s=\varphi(t)}.$$

Formula di $\int$ per sostituzione per integrali indefiniti.
Valida per f continua e φ di classe C^1.

Nel cambio bisogna sostituire $\varphi'(t)\,dt$ con ds

Aiuto mnemonico $\quad \varphi(t) = s$

$$\varphi'(t) = \frac{ds}{dt} \qquad \text{“} \varphi'(t)\,dt = ds \text{”}$$

$$\int \sin^2 t \cos t \, dt = \int f(\sin t)\,(\sin t)' \, dt =$$

$f(s) = s^2$

$\sin t = s$

$\cos t \, dt = ds$

$$= \left(\int s^2 \, ds \right)_{s = \sin t} = \frac{s^3}{3} + c = \frac{\sin^3 t}{3} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{\log x}}{x} \, dx = \int \sqrt{s} \, ds = \frac{2}{3} s^{3/2} + c =$$

$\log x = s$

$\frac{dx}{x} = ds$

$$= \frac{2}{3} (\log x)^{3/2} + c.$$

$$\int \cos(3x-5) \, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos(3x-5) \, dx = \frac{1}{3} \int \cos s \, ds =$$

$3x - 5 = s$

$3 \, dx = ds$

$$= \frac{1}{3} \sin s + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin(3x-5) + c.$$

Questo ragionamento si generalizza:

$$\boxed{\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \int f(s) \, ds \Big|_{s = ax+b}.}$$

$ax + b = s$

$a \, dx = ds$

$$\int \frac{dx}{1 + 4x^2} = \int \frac{dx}{1 + (2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + c$$

$2x = s$

$2 \, dx = ds$

$$\int e^{3-4x} \, dx = -\frac{1}{4} e^{3-4x} + c.$$

Vale una formula per gli integrali definiti.

$\varphi : I \to J$ di classe C^1, siano $\alpha, \beta \in I$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\underbrace{\varphi'(t)dt}_{ds} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds.$$

Attenzione: cambiano gli estremi

Valido $\forall f \in C(J)$, $\forall \varphi : I \to J$ di classe C^1.

La dim. si basa su quella per gli integrali indefiniti.

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt\right)\Bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta} \overset{\text{sost. per } \int \text{ indefiniti}}{=}$$

$$= \left[\left(\int f(s)\,ds\right)_{s=\varphi(t)}\right]_{t=\alpha}^{t=\beta} =$$

$$= \left[\int f(s)\,ds\right]_{s=\varphi(\alpha)}^{s=\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds$$

Esempi:

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$$

1° modo: $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int \frac{ds}{s} = \log(1+e^t) + c$

$1+e^t = s$
$e^t dt = ds$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \log(1+e^t)\Big|_0^1 = \log(1+e) - \log 2 =$$

$$= \log\frac{1+e}{2}$$

2° modo: direttamente per integrali definiti.

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt =$$

$1+e^t = s$ $\quad t=0 \Rightarrow s=2$
$e^t dt = ds$ $\quad t=1 \Rightarrow s=1+e$

$$= \int_2^{1+e} \frac{ds}{s} = \log s \Big|_2^{1+e} = \log \frac{1+e}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx =$$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = 1/2$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin t \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\arcsin \tfrac{1}{2}}_{\pi/6} - \underbrace{\arcsin 0}_{0}\Big] = \frac{\pi}{12}$$

A volte la formula di sostituzione si può usare "in verso opposto", cioè

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

$x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

Vale anche per integrali definiti.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Se φ è invertibile, con inversa φ^{-1}

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} =$$

$\sqrt{x} = t$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \qquad x = t^2$

$dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt \qquad dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{2t\,dt}{t+1}$$

In alternativa: $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\underbrace{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}_{=\,dt} =$ $\quad \sqrt{x} = t$

$$= \int \frac{2t}{t+1}\,dt$$

$$2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(t - \log|t+1|\right) + c \underset{t=\sqrt{x}}{=} 2\left(\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})\right) + c.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}+1} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}+1} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

ma è meglio in questo caso
(f. pari in intervallo simmetrico)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}+1} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= 4\left(\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})\right)\Big|_{0}^{1} = 4\left(1 - \log 2\right)$$

Integrali di funzioni razionali

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx \qquad \text{dove} \quad P_n \text{ e } Q_m \text{ sono polinomi.}$$

Se $n \geq m$ posso fare la divisione

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = D_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \qquad \text{con } k<m$$

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x}\,dx = \int \left(\underbrace{x+1}_{\text{ovvio}} + \frac{3x+1}{x^2-x}\right)dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\quad 2x \; +1 & x^2-x \\ \hline -x^3 \;\; +x^2 & x+1 \\ \hline \quad / \quad x^2 + 2x + 1 & \\ \quad\quad -x^2 \;\; +x & \\ \hline \quad\quad / \quad 3x + 1 & \end{array}$$

si scompone il polinomio a denominatore

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{3x+1}{x(x-1)}\,dx$$

si usa il metodo della scomposizione in fratti semplici

$$\frac{3x+1}{x(x-1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

cerco A e B in modo che valga l'uguaglianza.

moltiplico per $x(x-1)$

$$3x+1 \equiv A(x-1) + Bx$$

è un'uguaglianza di polinomi

grado 1 $\quad 3 = A+B$

grado 0 $\quad 1 = -A$

$$\begin{cases} 3 = A+B \\ 1 = -A \end{cases} \Longrightarrow \quad A=-1, \quad B = 3-A = 4$$

$$\int \frac{3x+1}{x(x-1)} = \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = 4 \log|x-1| - \log|x| + c$$

D'ora in poi considereremo $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ con $n < m$ (altrimenti si fa la divisione)

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x\,(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2).$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$1 = A(x-1)(x-2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 - x).$$

grado 2, 1, 0

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = -3A - 2B - C \\ 1 = 2A \end{cases} \qquad A = 1/2.$$

$$\begin{cases} B + C = -1/2 \\ 2B + C = -3/2 \end{cases}$$

$$B = -1$$

$$C = -1/2 - B = 1/2$$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x| - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-2| + c_1$$

$$= \log \frac{\sqrt{|x||x-2|}}{|x-1|} + c_1$$

Cosa succede se il denominatore ha radici reali con molteplicità >1 ?

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2}\, dx$$

$$x^3-2x^2 = x^2(x-2)$$

Si fa una scomposizione del tipo

$$\frac{3x+1}{x^3-2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$3x+1 = A\, x(x-2) + B(x-2) + C x^2$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{cases} 0 = A + C \\ 3 = -2A + B \\ 1 = -2B \end{cases}$$

$$\boxed{B = -1/2}$$

$$\boxed{A = \frac{B-3}{2} = -\frac{7}{4}}$$

$$\boxed{C = -A = \frac{7}{4}}$$

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2}\, dx = -\frac{7}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{7}{4}\log|x| + \frac{1}{2x} + \frac{7}{4}\log|x-2| + c_1$$

Resta il caso in cui ci sono radici non reali.

$$\int \frac{3x^2+x}{x^4-1}\, dx$$

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{irriducibile.}}$$

$$\frac{3x^2+x}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{2Cx+D}{x^2+1}$$

$2x$ è la derivata di x^2+1

Si trovano A, B, C, D $\Rightarrow$ farlo!

$$\int\frac{3x^2+x}{x^4-1}\,dx=A\int\frac{dx}{x-1}+B\int\frac{dx}{x+1}+C\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+D\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x$$

$$\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=$$

$x^2+1=t$

$2x\,dx=dt$

$$\int\frac{dt}{t}=\log(x^2+1)$$