Supponiamo $f \in R(a,b)$.

Prendiamo la partizione equispaziata di $[a,b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

In ogni intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ prendo un qualsiasi punto $\tilde{x}_k$ e considero la somma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$

Ovviamente

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\text{inf } f \\ [x_{k-1},x_k]}}{\underset{\shortparallel}{m_k}} (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\sup f \\ [x_{k-1},x_k]}}{\underset{\shortparallel}{M_k}} (x_k - x_{k-1}) = S_n$$

$$s_n \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad S_n \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Thm. dei carabinieri

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta_k x}}_{\text{Somme di Riemann.}} \xrightarrow{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

---

Oss. sul 2° TFC.I. (interpretazione meccanica)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad (*)$$

Se $s(t)$ è la posizione all'istante $t$ di un punto che si muove su una guida rettilinea. $s'(t) = $ velocità $= v(t)$

La $(*)$ diventa

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

spazio percorso nell'intervallo di tempo $[a,b]$.

# Integrazione per parti

Si parte dalla formula di derivata del prodotto, che scrivo così:

$$f'g = (fg)' - fg'$$

Se prendo gli integrali indefiniti, ottengo

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

Integrazione per parti per $\int$ indefiniti.

Se prendo gli integrali definiti, ottengo

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

Integrazione per parti per $\int$ definiti.

Esse sono valide per funzioni $f, g$ di classe $C^1$ nell'intervallo considerato (cioè derivabili con derivata continua).

---

$$\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)}\,dx = xe^x - \int e^x \cdot 1\,dx = xe^x - e^x + c$$
$$= e^x(x-1) + c.$$

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ $f(x) = e^x$

$g(x) = x$ $\qquad$ $g'(x) = 1$

Se avessi scambiato i ruoli di $f$ e $g$?

$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

$$\int x e^x\, dx = \frac{x^2}{2} e^x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} e^x\, dx}_{\text{più difficile di quello di partenza (non conviene!)}}$$

---

È se fosse stato l'integrale definito

$$\int_0^1 x e^x\, dx \; ?$$

1°) Calcolo l'$\int$ indefinito $\int x e^x\, dx = e^x (x-1) + c$

$$\int_0^1 x e^x\, dx = e^x (x-1)\Big|_0^1 = 0 - (1 \cdot (-1)) = 1.$$

2°) Uso l'integrazione per parti direttamente per $\int$ definiti.

$$\int_0^1 x e^x\, dx = \underbrace{x e^x\Big|_0^1}_{= e} - \underbrace{\int_0^1 1 \cdot e^x\, dx}_{= e^x\big|_0^1 = e-1} = e - (e-1) = 1.$$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

---

L'integrazione per parti si può iterare:

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x\, dx}_{\text{appena calcolato, è } e^x(x-1)+c} = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$\int_1^e 1\cdot \log x \, dx = \underbrace{x \log x \Big|_1^e}_{= e} - \underbrace{\int_1^e \cancel{x}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx}_{e-1} = e-(e-1)=1$$

$$f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x$$
$$g(x)=\log x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$$

Integrale indefinito $\int \log x \, dx = x\log x - x + c = x(\log x - 1)+c$

$$\int 1\cdot\log(x-3)\,dx = (x-3)\log(x-3) - \int (x-3)\frac{1}{(x-3)}\,dx =$$

$$f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x-3$$
$$= (x-3)\log(x-3) - x + c.$$
$$g(x)=\log(x-3) \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x-3}$$

---

$$\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx = \underbrace{e^x\cos(3x)\Big|_0^\pi}_{\substack{= e^\pi(-1)-1 \\ = -e^\pi - 1}} + 3\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx =$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x$$
$$g(x)=\cos(3x) \Rightarrow g'(x)=-3\sin(3x)$$

$$= -e^\pi - 1 + 3\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx =$$

$$= -e^\pi - 1 + 3\Big[\underbrace{\cancel{e^x\sin(3x)\Big|_0^\pi}}_{=0} - 3\int_0^\pi e^x\cos(3x)\,dx$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x$$
$$g(x)=\sin(3x) \Rightarrow g'(x)=3\cos(3x)$$

N.B con la scelta opposta tornerei all' integrale di partenza

Riscrivo

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx = -e^{\pi}-1 \underbrace{-9\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx}$$

$$\cancel{10}\int_0^{\pi} e^x \cos(3x)\,dx = \frac{-e^{\pi}-1}{10}$$

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos x\,dx = \sin x \sin(3x) - 3\int \cos(3x)\sin x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} f'(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=\sin x & f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=-\cos x \\ g(x)=\sin(3x) \Rightarrow g'(x)=3\cos(3x) & g(x)=\cos(3x) \Rightarrow g'(x)=-3\sin(3x) \end{array}\right]$$

$$= \sin x \sin(3x) - 3\left[-\cos x\cos(3x) \underbrace{-3\int \sin(3x)\cos x\,dx}_{\text{porto a } 1^\circ \text{ membro}}\right]$$

$$(1-9)\int \operatorname{sen}(3x)\cos x\,dx = \sin x\sin(3x) + 3\cos x\cos(3x) + c$$

$$\int \sin(3x)\cos x\,dx = -\frac{1}{8}\left[\sin x\sin(3x) + 3\cos x\cos(3x)\right] + c_1$$

Si potevano anche usare le formule di Werner:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

$$\sin(3x)\cos x = \frac{1}{2}\left[\sin(4x) + \sin(2x)\right].$$

$$\int \sin(3x)\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(4x) + \sin(2x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right] + c.$$

Si può verificare che questa funzione e quella trovata prima differiscono per una costante.

---

$$\int \cos^2 x \, dx = \text{(già visto)} \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right) + c$$

Si può fare anche per parti.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$\begin{bmatrix} f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x \\ g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x \end{bmatrix}$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$$

---

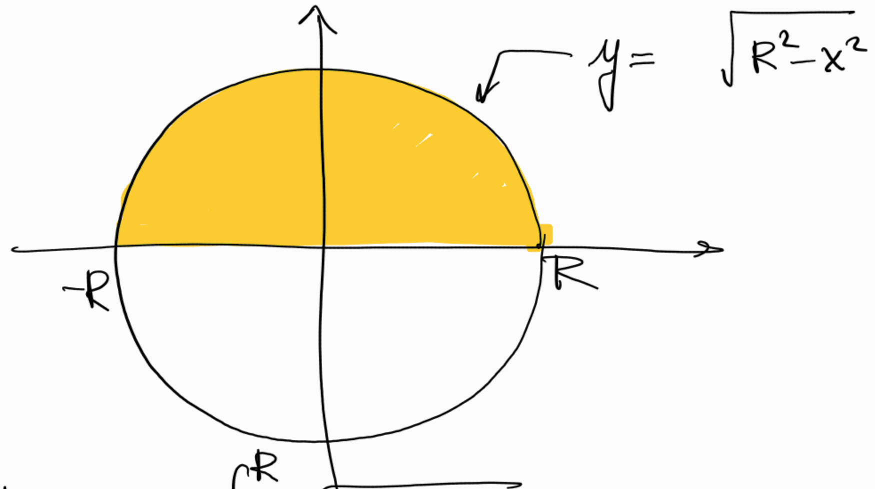
$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$\left(\log(1+x^2)\right)'$$

$$\begin{bmatrix} f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x \\ g(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix}$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Area del cerchio:




$$\text{Area} = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

funz. integranda pari

$$\int_0^R 1\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \cancel{x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R} + \int_0^R \frac{(x^2-R^2)+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx =$$

$f'(x) = 1$, $f(x) = x$

$g(x) = \sqrt{R^2-x^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2-x^2}}$

$$= \underbrace{-\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx}_{\text{al } 1^\circ \text{ membro}} + \int_0^R \frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \frac{R}{2}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} =$$

$$\sqrt{R^2-x^2} = R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

$$\left[\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)' = \frac{1/R}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\right]$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^R \frac{dx}{R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_0^R =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[\underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\shortparallel}{\arcsin 1}} - \underbrace{\arcsin 0}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\right] = \frac{R^2\pi}{4}$$

area (cerchio) $= R^2\pi$.

---

$$\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \sin x - 3\int x^2 \sin x\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{llll} f'(x)=\cos x \Rightarrow & f(x)=\sin x & f'(x)=\sin x & f(x)=-\cos x \\ g(x)=x^3 \Rightarrow & g'(x)=3x^2 & g(x)=x^2 & g'(x)=2x \end{array}\right]$$

$$= x^3\sin x - 3\left[-x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx\right] =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2\cos x - 6\int x\cos x\, dx =$$

$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=\sin x$$
$$g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6\left[x\sin x \underbrace{- \int \sin x\, dx}_{\substack{\shortparallel\\ \cos x}}\right] =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

---

Questo suggerisce delle formule ricorsive per l'integrale

$$I_n(x) = \int x^n \cos x\, dx \qquad \begin{array}{ll} f'(x)=\cos x & f(x)=\sin x \\ g(x)=x^n & g'(x)=nx^{n-1} \end{array}$$

$$I_n(x) = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} f'(x)=\sin x \Rightarrow & f(x)=-\cos x \\ g(x)=x^{n-1} \Rightarrow & g'(x)=(n-1)x^{n-2} \end{array}\right]$$

$$= x^n \sin x - n\left[-x^{n-1}\cos x + (n-1)\underbrace{\int x^{n-2}\cos x\,dx}_{I_{n-2}(x)}\right]$$

$$\boxed{I_n(x) = x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)\,I_{n-2}(x)}$$

Trovare una formula iterativa per

$$I_n(x) = \int \sin^n x\,dx = \int \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_{g}\,\underbrace{\sin x}_{f'}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x \\ g(x) = \sin^{n-1} x \Rightarrow g'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \end{array}\right]$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \quad '' \quad + (n-1)\underbrace{\int \sin^{n-2} x\,dx}_{I_{n-2}(x)} - (n-1)\underbrace{\int \sin^n x\,dx}_{I_n(x)}$$

a 1° membro

$$\Rightarrow \underbrace{(1+n-1)}_{=n} I_n(x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\,I_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n(x) = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}(x)}$$