Dim. del 1° teor. fondamentale del Calcolo Integrale

(nell'ipotesi supplementare che $f$ sia continua in un intorno di $x_0$)

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

$$\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt} =$$

supp. $x > x_0$

se $x$ è abbastanza vicino a $x_0$, $f$ è continua in $[x_0, x]$

$\Longrightarrow$ Teorema della media integrale

$\exists\, c = c(x) \in [x_0, x]$ t.c.

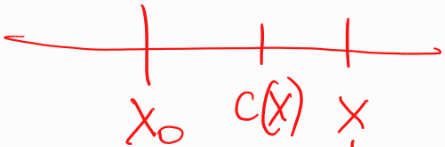
$$f(c) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$$= f(c(x))$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f(c(x)) = [t = c(x)]$$

dove $x_0 \leq c(x) \leq x$

OSS se $x \to x_0^+$, anche $c(x) \to x_0^+$




$$= \lim_{t\to x_0^+} f(t) = f(x_0) \Longrightarrow (F_c)'_+(x_0) = f(x_0)$$

Facendo gli stessi passaggi e facendo $x \to x_0^-$, si ottiene che anche $(F_c)'_-(x_0) = f(x_0)$

$$F_c'(x_0) = f(x_0)$$

$\square$

In particolare, se $f \in C([a,b])$ ($f$ continua in $[a,b]$) allora

$$F_c'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

**DEF** Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo.
Una funzione $G: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> di $f$ se $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

<u>Esempio</u>
$x^2$ è una primitiva di $2x$ in $\mathbb{R}$
$\frac{x^4}{4}$ è una primitiva di $x^3$ in $\mathbb{R}$
$\frac{x^4}{4} - 7$ " " " " $x^3$ in $\mathbb{R}$.
$-\cos x + c$ " " " " $\sin x$ in $\mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

---

**OSS.** Se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $I$, anche $G(x) + c$ (dove $c \in \mathbb{R}$) lo è.
Ce ne sono altre? <u>NO</u>

---

**PROP.** Siano $G(x)$ e $F(x)$ due primitive di $f$ in $I$.
Allora $G(x) - F(x) =$ costante in $I$

**DIM.** $$(G(x) - F(x))' = \underbrace{G'(x)}_{f(x)} - \underbrace{F'(x)}_{f(x)} = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$\Rightarrow$ $G(x) - F(x)$ è costante $\square$

Il primo Teorema fondamentale del calcolo integrale dice che: ogni funzione continua in $I$ ammette una primitiva: $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

(e quindi ne ammette infinite, aggiungendo costanti)

Una primitiva di sen$(x^2)$ in $\mathbb{R}$ è

$$F_0(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt.$$ (anche se questa funzione non è esprimibile direttamente tramite le funzioni elementari)

Equivalentemente:

Se $f$ è continua in $I$, tutte le sue primitive sono date da $\left\{ \int_c^x f(t)\,dt + c_1 \,,\ c_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Per questo motivo l'insieme delle primitive di $f$ si indica con $\int f(x)\,dx$ e si chiama **integrale indefinito di $f$**.

Per es.

$$\int \sin x\,dx = \{-\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = x^3 - \log x + c,\ c \in \mathbb{R}. \quad \text{per } x>0$$

Abbiamo trovato due simboli di integrale.

- $\int_a^b f(x)\,dx$ integrale di Riemann, o integrale definito:

  è un concetto di calcolo integrale (partizioni, somme superiori, somme inferiori, etc..), ed è un numero

- $\int f(x)\,dx$ integrale indefinito:

  è un concetto di calcolo differenziale e denota l'insieme delle funzioni primitive di $f$, o anche una sola di esse

Viene dal concetto di <u>derivata</u>.

Il primo teorema fondamentale collega questi due concetti nel seguente modo:

Se $f \in C(I)$, allora

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \int_c^x f(t)\,dt + c_1 \right\}$$

dove $c$ è un pto fissato di $I$.

**Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale:**

Sia $f$ continua in $[a,b]$. Sia $G(x)$ una primitiva di $f$ in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(x)\Big|_a^b$$

<u>Dim.</u> $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$

ma anche $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di $f$ per il 1° teor. fond.

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$G(b) - G(a) = F(b) + \cancel{c} - (F(a) + \cancel{c}) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\cancel{\int_a^a f(t)\,dt}}_{\shortparallel\atop 0} = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \square$$

Per es.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 =$$
$$= 1 + 1 = 2.$$

In termini di integrali definiti/indefiniti, il 2° teor. fond. dice che

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se } f \text{ è continua in } [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b\end{array}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

$$\int_2^3 \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 7\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(81-16) - \frac{4}{3}(27-8) + \frac{5}{2}(9-4) - 7(3-2)$$

---

Il calcolo di un integrale di Riemann è ricondotto al calcolo della primitiva di una funzione integranda.
La prima cosa da fare è: una tabella di primitive ottenuta a partire da una tabella di derivate di funzioni elementari

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $c$ costante | $cx + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$ |
| $x^\alpha$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (c \in \mathbb{R}).\ \boxed{\alpha \neq -1}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\left.\begin{array}{ll}\log x + c & \text{se } x>0 \\ \log(-x) + c & \text{se } x<0\end{array}\right\} \log\lvert x\rvert + c \quad x \neq 0$ |

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\Big|_{-3}^{-2} = \log 2 - \log 3 = \log\frac{2}{3}$$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x^{3/2} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x} + c$ |
| $\frac{1}{x^3}$ | $-\frac{1}{2x^2} + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\log a} + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1$ | $tg\, x + c \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\cot g\, x + c = -\frac{\cos x}{\sin x} + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + c = -\arccos x + c_1 \qquad -1 < x < 1$ |

Infatti $-\arccos x$ e $\arcsin x$ differiscono per una costante

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$$

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + c$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x + c$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{settsh} x + c = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \qquad x \in \mathbb{R}.$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{settch} x + c = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c \quad$ se $x > 1$ |
| | $\operatorname{settch}(-x) + c = \log\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right) + c \quad$ se $x < -1.$ |
| $\lvert x\rvert$ | $\frac{x\lvert x\rvert}{2} + c$ |

$$\int_1^2 \left[(x-1)^3 + \sin x + \frac{3}{x}\right] dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4} - \cos x + 3\log x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \cos 2 + \cos 1 + 3\log 2 - \cancel{3\log 1}$$

$$\int_0^1 \cos(5x-1)\, dx = \frac{\sin(5x-1)}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\left[\sin 4 + \sin 1\right]$$

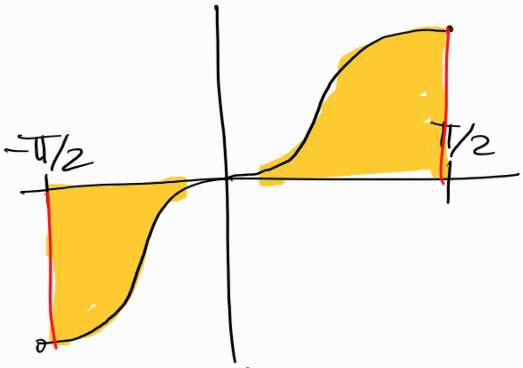
$$\int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi =$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \cancel{\frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_0^\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x \, dx = 0$$




perché è l'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

---

$$\int_{-27}^{27} \sin^5 (x^3) \, dx = 0$$

Quindi $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ se $f$ è dispari.

---

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{se } f \text{ è pari}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx =$$

$f$ pari

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} (\cos x - \cos x \sin^2 x)\,dx$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

# Integrazione per parti

Formula di derivata del prodotto.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Supponiamo che $f, g \in C^1([a,b])$ cioè:

$f, g$ derivabili in $[a,b]$ con derivata continua

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{in } [a,b] \ (*)$$

Integro tra a e b.

$$\underbrace{\int_a^b (f(x)g(x))' dx}_{\left[f(x)g(x)\right]_a^b} = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

La riscrivo così:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

integrazione per parti (per integrali definiti).

Se invece da $(*)$ prendo gli integrali indefiniti, ottengo

$$f(x)g(x) + c = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

cioè

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

la costante c si può omettere

Integrali indefiniti

in quanto gli integrali indefiniti la contengono già.