Compilare i questionari anonimi sul corso!

Codice OPIS	A.A.	Compilati	Corso di Studi	Modulo	Insegnamento	Canale	Anno
$\boxed{\text{AI173BR0}}$	2024	33	INGEGNERIA AEROSPAZIALE (30837)		ANALISI MATEMATICA I (1015374)	A - K	1
GKKK2UZG	2024	0	INGEGNERIA AEROSPAZIALE (30837)		LABORATORIO DI MATEMATICA (AAF1524)	NESSUNA CANALIZZAZIONE	1

Pagina: 1 Righe per pagina: 10 1 - 2 di 2

Calcolare $\int_2^3 (x^3-2x^2+5x-3)\,dx =$ (linearità)

$$= \int_2^3 x^3\,dx - 2\underbrace{\int_2^3 x^2\,dx} + 5\int_2^3 x\,dx \underbrace{- 3\underbrace{\int_2^3 1\cdot dx}_{1}}_{-3}$$

(II) additività rispetto all'intervallo

$$\int_2^0 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx$$

$$\| $$

$$\underbrace{-\underbrace{\int_0^2 x^2\,dx}_{-\frac{2^3}{3}} + \underbrace{\int_0^3 x^2\,dx}_{\frac{3^3}{3}}}_{\frac{19}{3}} =$$

$$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$$

$$\int_2^3 x^3\,dx = -\int_0^2 x^3\,dx + \int_0^3 x^3\,dx = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}$$

$$\int_2^3 x\,dx = \int_0^3 x\,dx - \int_0^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^2 - 2^2\right) = \frac{5}{2}$$

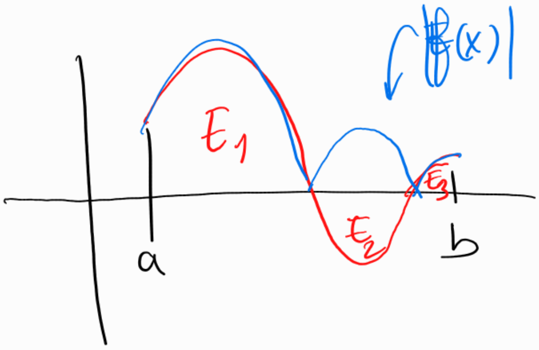
$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

Altre proprietà dell' integrale.

9) Se $f \in R(a,b)$, anche $|f| \in R(a,b)$ e si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(dis. triangolare per $\int$).



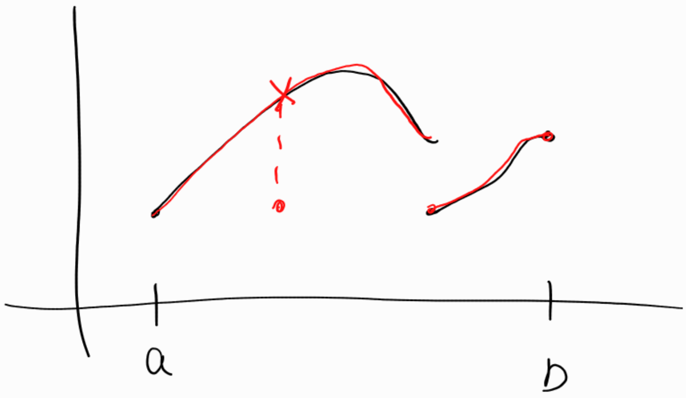
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |\text{area } E_1 + \text{area } E_3 - \text{area } E_2|$$

$$\leq \text{area } E_1 + \text{area } E_2 + \text{area } E_3$$

$$= |\quad - | + | - | + | - |$$

10) se $f \in R(a,b)$, e g è una funzione ottenuta modificando f in ~~un solo punto~~ un numero finito di punti, allora:

$$g \in R(a,b) \quad e \quad \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$



$y = f(x)$

$y = g(x)$

Conseguenza: Si può definire senza ambiguità, per esempio,

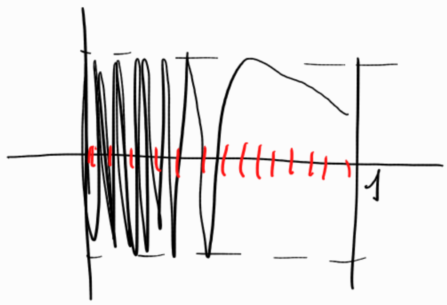
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \qquad \text{N.B non è definita per } x=0.$$

Ma se la definiamo in qualsiasi modo in $x=0$, per es.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \in (0,1] \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

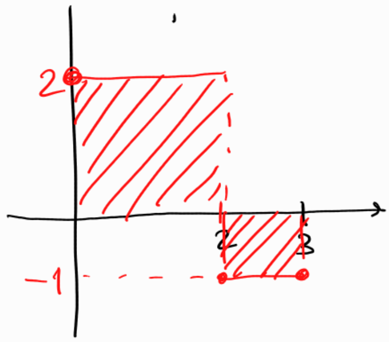
f risulta integrabile in $[0,1]$ (limitata e continua eccetto in $x=0$) e il suo integrale non dipende dal valore scelto per $x=0$.

Allo stesso modo, resta definito $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$



11) Integrali di funzioni costanti a tratti.

Sia $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,2) \\ -1 & \text{se } x \in [2,3]. \end{cases}$



$$\Rightarrow \int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x) dx =$$

$$= \int_0^2 2\, dx + \int_2^3 (-1)\, dx = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3$$

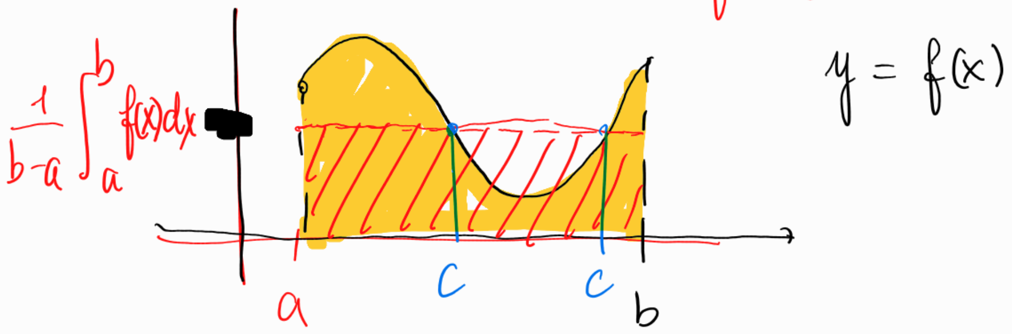
12) Ricordo (proprietà 1) che

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x) dx \le (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

dividendo per $b-a > 0$, ottengo

$$\inf_{[a,b]} f \le \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \le \sup_{[a,b]} f$$

valor medio di f in $[a,b]$ $= \displaystyle ⨍_a^b f(x)\,dx$



Se inoltre f è continua in $[a,b]$, per il teorema dei valori intermedi, essa assume tutti i valori compresi tra inf e sup di f, quindi anche il suo valor medio:

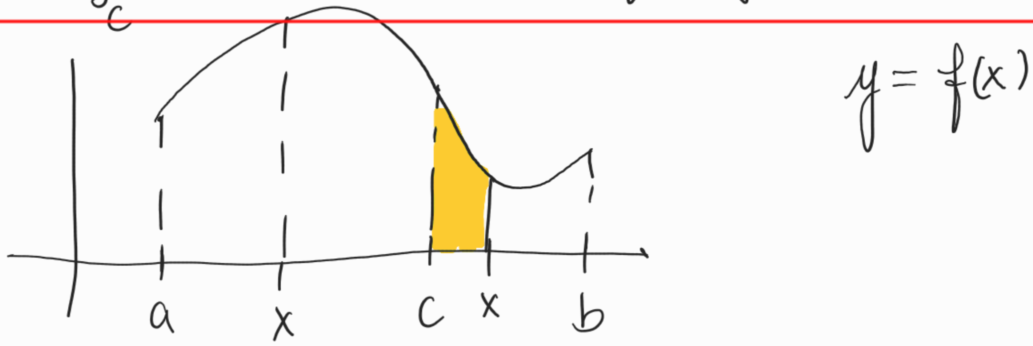
TEOREMA della MEDIA INTEGRALE

Se f è continua in $[a,b]$, $\exists\, c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

DEF Funzioni integrali. Sia $f \in R(a,b)$. Sia $c \in [a,b]$; definiamo la **funzione integrale** di f relativa al punto c, come

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

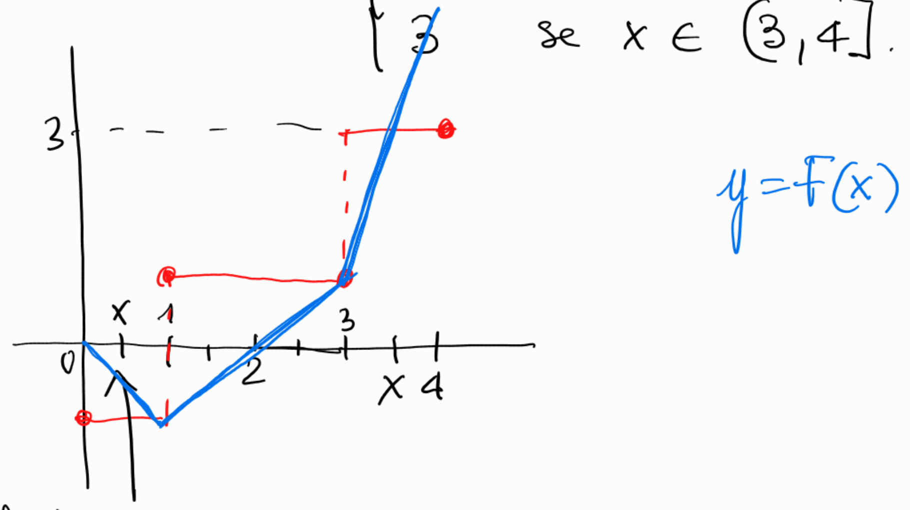


Esempio 1 $\quad f(x) = x^2 \quad$ e $\quad c = 0$.

$$F_0(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} \qquad \forall x \ge 0.$$

$$F_1(x) = \int_1^x t^2\,dt = \underbrace{\int_1^0 t^2\,dt}_{= -\int_0^1 t^2\,dt = -1/3} + \underbrace{\int_0^x t^2\,dt}_{= \frac{x^3}{3}} = \frac{x^3-1}{3}$$

Esempio 2 Sia $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \in [1,3] \\ 3 & \text{se } x \in (3,4]. \end{cases}$



$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

1) se $x \in [1,3]$ $F_2(x) = \int_2^x 1\,dt = 1\cdot(x-2)$ $\forall x \in [1,3]$
$= x-2$.

2) se $x \in (3,4]$, $F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_2^3 1\,dt}_{1} + \underbrace{\int_3^x 3\,dt}_{3(x-3)} =$

$F_2(x) = 1 + 3(x-3) = 3x-8$

3) se $x \in [0,1)$

$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_2^1 1\,dt}_{= 1\cdot(1-2) = -1} + \underbrace{\int_1^x (-1)\,dt}_{= (-1)(x-1)} = -1-(x-1) = -x$$

$$F_2(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-2 & \text{se } x \in (1,3] \\ 3x-8 & \text{se } x \in (3,4] \end{cases}$$

<u>OSS</u> F_2 è continua in $[0,4]$.

F_2 è derivabile nei punti in cui f è continua,

e $$F_2'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \in (1,3) \\ 3 & \text{se } x \in (3,4] \end{cases}$$

$F_2'(x) = f(x)$ in tutti i punti x in cui f è continua

TEOREMA (Continuità della funzione integrale).

Sia $f \in R(a,b)$. Sia $c \in [a,b]$, e sia $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$.

Allora F_c è continua in $[a,b]$.

<u>Dim</u> Sia $x_0 \in [a,b]$. Devo provare che

$$\lim_{x \to x_0} F_c(x) = F_c(x_0).$$

$$\lim_{x \to x_0^+} F_c(x) \stackrel{?}{=} F_c(x_0)$$

$$0 \le |F_c(x) - F_c(x_0)| = \left| \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_c^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^c f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le$$

$$\leq (x - x_0) \sup_{[a,b]} |f(t)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \qquad \square$$

$$\cap$$

$$\mathbb{R}$$

PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INT.

Sia $f \in R(a,b)$. Sia $c \in [a,b]$ e sia $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$.

Se f è continua in x_0, allora F_c è derivabile in x_0, e si ha

$$F_c'(x_0) = f(x_0).$$