

Come sempre, si ricorda di fare **prima** esercizi dai testi consigliati.

Trovare gli insiemi di continuità e derivabilità per le seguenti funzioni:

$$\mathbf{0.1} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{0.2} \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità per le seguenti funzioni:

$$\mathbf{0.3} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\mathbf{0.4} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\mathbf{0.5} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\mathbf{0.6} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } xy \geq 0, \\ 0 & \text{se } xy < 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{0.7} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy^2} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{0.8} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } y \geq 0, \\ |x|y & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

0.9 (*)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^8 + (x^2 - y^3)^2}{x^4 + y^6} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{per } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\mathbf{0.10} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} \frac{\sin^2(x+y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{0.11} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^3 - 2y^3} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{0.12} \quad (*) \quad f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}x^2y & y \geq 0 \\ \frac{e^{xy} - 1}{y} & y < 0 \end{cases}$$

0.13 Sia $f(x, y)$ una funzione regolare di due variabili. Esprimere il laplaciano di f , $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in coordinate polari.

0.14 (*) Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x, y) = 5 + (x + \sin y)^3(x - \sin y).$$

0.15 (*) Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x, y) = \frac{2 - x^2y^2}{\exp(4\sqrt{x^2 + y^2})}.$$

0.16 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (2x - 3)e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1. Mostrare che l'origine è un estremo relativo per f .

0.17 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}(x^4 - y^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

0.18 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} + y^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^2 - \frac{x}{2}$$

nel dominio $D = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

0.19 (*) Trovare massimi e minimi locali della funzione $f(x, y) = [(x - 2)^2 - 9y^2 - 5] \exp(x + \frac{2-x^2+9y^2}{4})$

0.20 Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \ln(8y - 2x^2 - 2y^2),$$

a) determinarne il dominio;

b) individuarne i punti critici;

c) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

0.21 Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = (e^{x+1} - 1) \ln(1 + y^2) + x^2 - x,$$

a) individuarne i punti critici;

b) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

0.22 Data la funzione di due variabili $f(x, y) = 4xy^2 - x - 3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

0.23 Data la funzione di due variabili $f(x, y) = x^3 + (x + y)(y - 3x)$, determinarne i punti critici e classificarli. Successivamente trovare massimo e minimo assoluti nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 8)$.

0.24 Data la funzione

$$f(x, y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2),$$

calcolarne i punti critici e classificarli. Successivamente calcolarne gli estremi assoluti nel triangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$.

0.25 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3y - 2y^2 + 3x^2y.$$

0.26 Data la funzione

$$f(x, y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1,$$

determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in \mathbb{R}^2 .

1 Risposte ad alcuni esercizi

0.22: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$: punto di sella; $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$: punto di sella; max. assoluto nel quadrato: $f(1, 1) = 0$; min. assoluto nel quadrato: $f(0, 1) = -3$; **0.26:** $(0, 0)$ punto di massimo relativo; $(2, 0)$: punto di sella; $(0, \pm\sqrt{2})$: punti di sella; $(2, \pm\sqrt{2})$: punti di minimo relativo;