# ANALISI VETTORIALE per Fisica
**– Diario delle lezioni - Settimana n. 4–**

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio[1], docente del corso.

---

## Lunedì 20 ottobre 2014 - Venerdì 24 ottobre 2014

- Dimostrazione della formula di Taylor del primo ordine con resto di Lagrange.
- Dimostrazione della formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano.
- Cenni sulle formule di Taylor di ordine superiore.
- **Esercizio svolto:** Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $f(x, y) = x\, e^{xy}$ con punto iniziale $(1, 2)$.
- Dimostrazione del criterio di classificazione dei punti critici mediante la matrice hessiana.
- **Osservazione:** Se la matrice Hessiana è semidefinita, non si può dire nulla sulla natura del punto critico.
- **Esempio:** $f(x, y) = x^2 - y^4$ e $g(x, y) = x^2 + y^4$ hanno rispettivamente un punto di sella e un minimo nell'origine, ma non lo si può capire dalle derivate seconde, che sono uguali.
- **Esercizio svolto:** Calcolare e classificare i punti critici di $f(x, y) = \ln(4y - x^2 - y^2)$.
- **Esercizio svolto:** Calcolare e classificare i punti critici di $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$.
- **Esercizio svolto:** Calcolare e classificare i punti critici di $f(x, y) = (x^4 - y^4)\, e^{x^2-y^2}$.
- **Funzioni iperboliche e loro inverse.**
- **Esercizio svolto:** Calcolare e classificare i punti critici di $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$.
- **Esercizio svolto:** Calcolare e classificare i punti critici di $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$.
- **Funzioni convesse.**
- **Teorema:** Sia $E$ un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$. Allora $f$ è convessa (concava) se e solo se la matrice hessiana $H_f(\mathbf{x})$ è semidefinita positiva (negativa) per ogni $\mathbf{x}$. *(s.d.)*
- **Funzioni implicite.** Descrizione del problema dell'esplicitazione locale di un'equazione in due variabili.
- **Esempi:** Problema dell'esplicitazione locale dell'equazione $F(x, y) = 0$ nei seguenti casi modello:
  - * $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$;
  - * $F(x, y) = x^2 - y^2$;
  - * $F(x, y) = x^2 + y^2$;
  - * $F(x, y) \equiv 0$.
- **Teorema di Dini o delle funzioni implicite in** $\mathbb{R}^2$ per funzioni di classe $C^1$.
- **Applicazione** del teorema agli esempi precedenti.
- **Esercizio:** Verificare che l'equazione
$$(x + 1)y^2 + \operatorname{sen}(xy) + 3(e^x - 1) = 0$$
individua in un intorno di $(0, 0)$ una funzione di una sola variabile, e trovare la derivata di tale funzione nel punto 0. Trovare la derivata seconda di tale funzione nel punto 0 e disegnare l'insieme delle soluzioni dell'equazione in un intorno di $(0, 0)$.

---

[1] Con qualche aiuto da:
**Mike Keneally and Beer for Dolphins** - Dancing
**Neil Young** - Zuma
**Don Pullen** - Healing Force