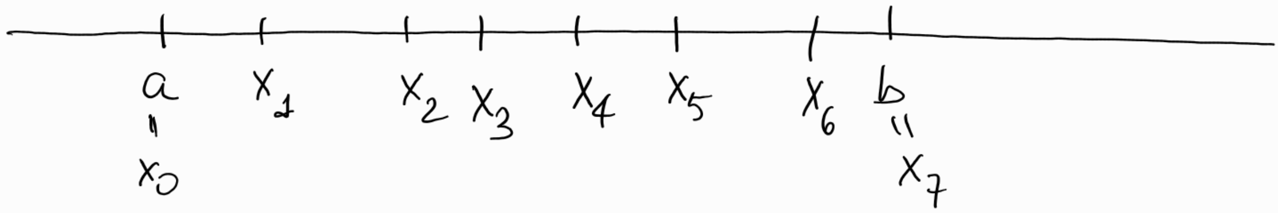
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

$\mathcal{P}$ = partizione di $[a,b] = \{x_0, x_1, \dots x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b\}$

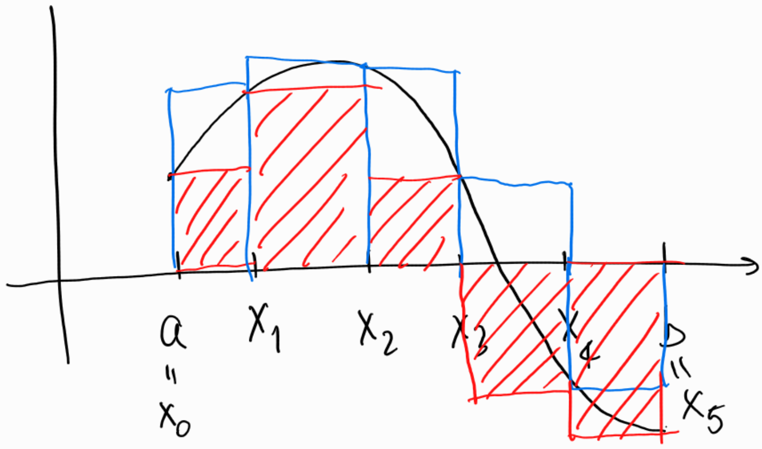



<u>somma superiore</u> $\quad S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

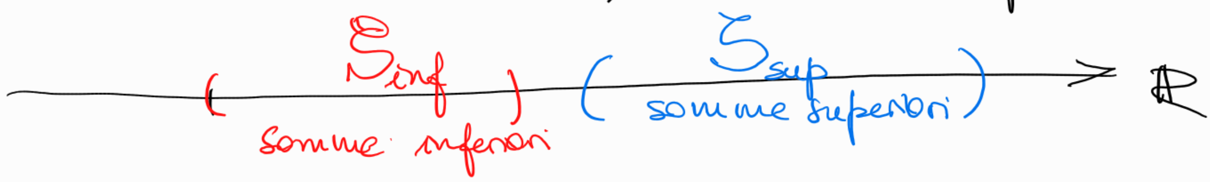
<u>somma inferiore</u> $\quad s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$




<u>oss</u> $\quad s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{P}) \quad \forall \mathcal{P}$ partizione di $[a,b]$

Ma c'è di più $\quad s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{Q}) \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ partizioni di $[a,b]$



Chiamo $\mathcal{S}_{inf} = \{ s(P), \ P \text{ partizione di } [a,b] \}$

$\mathcal{S}_{sup} = \{ S(P), \ P \text{ partizione di } [a,b] \}$

---

OSS si ha $\sup \mathcal{S}_{inf} \leq \inf \mathcal{S}_{sup}$

---

Quando $\sup \mathcal{S}_{inf} = \inf \mathcal{S}_{sup}$, diremo che $f$ è integrabile secondo Riemann.

Un approccio differente è prendere le partizioni equispaziate

$$P_n = \left\{ x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots n \right\}$$

Calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} s(P_n) \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} S(P_n)$$

Un'altra definizione (equivalente!) di integrabilità è dire che una funzione $f$ è integrabile in $[a,b]$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{s(P_n)}_{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{S(P_n)}_{S_n}.$$

Questi due procedimenti portano allo stesso risultato.

**DEF** Sia $f$ limitata in $[a,b]$.

Diremo che $f$ è **integrabile secondo Riemann** in $[a,b]$, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(a,b)$ se vale una delle seguenti due condizioni equivalenti

$$\sup \mathcal{S}_{inf} = \inf \mathcal{S}_{sup} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underset{s(P_n)}{\underset{\shortparallel}{s_n}} = \lim_{n\to+\infty} \underset{S(P_n)}{\underset{\shortparallel}{S_n}} \qquad (2)$$

e il numero individuato dalla (1) e dalla (2) si chiama **integrale di $f$ in $[a,b]$**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup \mathcal{S}_{inf} = \inf \mathcal{S}_{sup} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

**TEOREMA** Sia $f$ limitata in $[a,b]$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup \mathcal{S}_{inf} \; ; \; \lim_{n\to+\infty} S_n = \inf \mathcal{S}_{sup}$$

In particolare (1) e (2) sono equivalenti.

Quello che abbiamo fatto nella scorsa lezione, quando abbiamo calcolato $S_n$ relativo a $f(x) = x^2$ in $[0,b]$ e $s_n$, abbiamo provato che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{b^3}{3}$$

Abbiamo provato in realtà che $f(x)=x^2$ è integrabile in $[0,b]$ e

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$$

Allo stesso modo si prova che

$$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} \; ; \; \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

OSS $\int_0^b f(x)\,dx$ è un numero, e il nome della variabile indicata non ha importanza:

$$\int_0^b x^2 dx = \int_0^b t^2\,dt = \frac{b^3}{3}$$

# Classi di funzioni integrabili

**TEOREMA**

Se $f$ è monotòna in $[a,b]$ (oss $\Rightarrow f$ limitata in $[a,b]$
per es. se $f$ è crescente
$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \ \forall x \in [a,b]$)

allora $f \in R(a,b)$.

Dim supp. $f$ crescente.

Considero la partizione equispaziata $P_n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b-a}{n}} M_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1})$$

Sappiamo dal teorema che $S_n$ e $s_n$ ammettono limite finito
proviamo che è uguale.

$$S_n - s_n = \frac{b-a}{n} \left( \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \Big( \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} + \dots + \cancel{f(x_{n-1})} + f(x_n) + $$
$$ - f(x_0) - \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_2)} - \dots - \cancel{f(x_{n-1})} \Big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \big( f(x_n) - f(x_0) \big) = \frac{b-a}{n} \big( f(b) - f(a) \big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n. \qquad \square$$

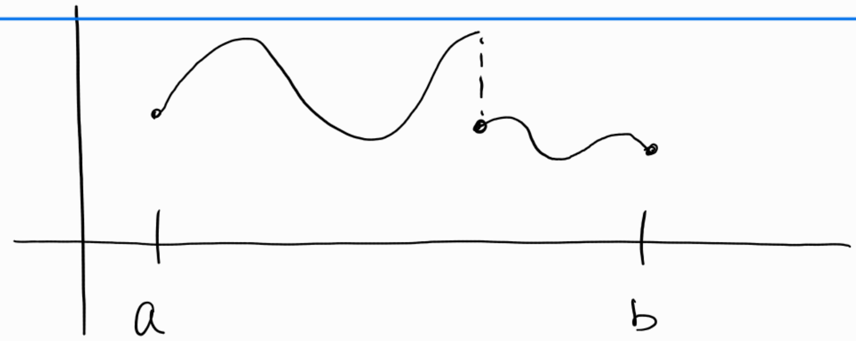
**TEOREMA**

Se $f \in C([a,b]) \Longrightarrow f \in R(a,b)$

cioè $f$ continua in $[a,b] \Rightarrow f$ limitata per Weierstrass

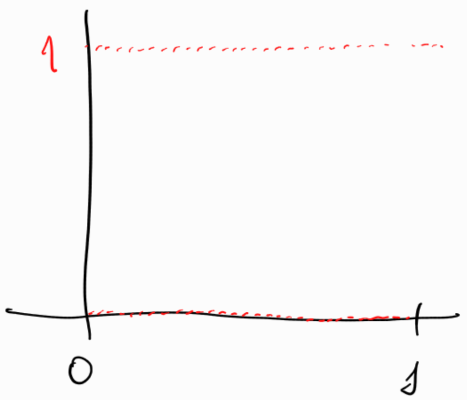
**TEOREMA**

Se $f$ è limitata in $[a,b]$, e continua eccetto in un numero finito di punti allora $f \in R(a,b)$



Esempio di una funzione limitata in $[a,b]$ che non è integrabile in $[a,b]$: funzione di Dirichlet in $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Fissata $P$, calcolo

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underbrace{M_k}_{=\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1$$

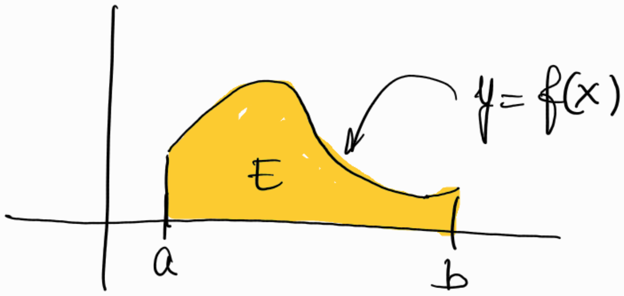
perché $[x_{k-1}, x_k]$ contiene razionali

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underset{\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \,=\, 0}{m_k} = 0$$

perché $[x_{k-1}, x_k]$ contiene irrazionali

$$\sup \mathcal{S}_{inf} = \sup\{0\} = 0 \quad < \quad \inf \mathcal{S}_{sup} = \inf\{1\} = 1$$

## Interpretazione geometrica

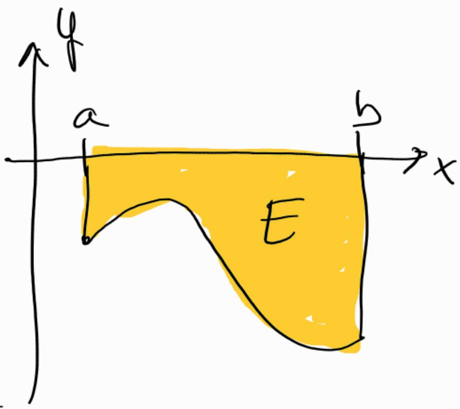



1) se $f \geq 0$,

$\int_a^b f(x)\,dx$ si interpreta come

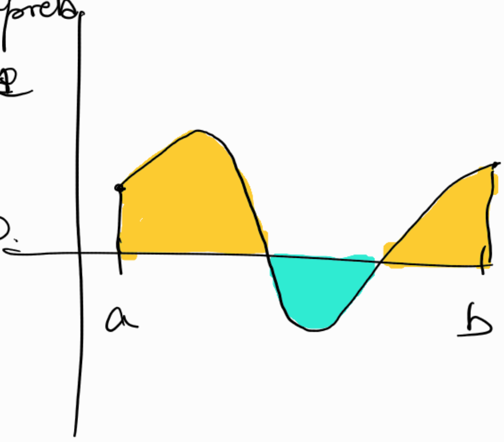
l'area della regione piana

$$E = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$




2) se $f \leq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ si interpreta come l'opposto dell'area della regione

$$E = \{(x,y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

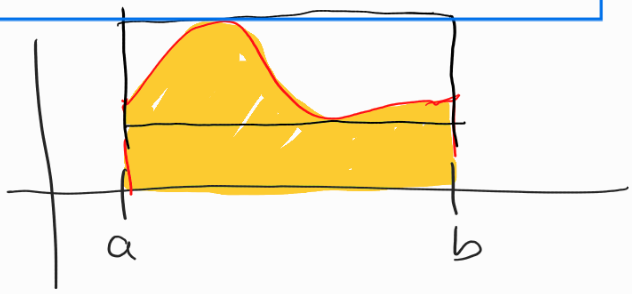



3) se $f$ cambia segno, $\int_a^b f(x)\,dx$ si interpreta come la somma algebrica delle aree relative ai tratti in cui $f$ è $\geq 0$ e delle aree ~~relative~~ ai tratti in cui $f$ è $< 0$ (queste ultime prese con il segno meno)

# Proprietà dell'integrale di Riemann

Supponiamo $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$.

1) $$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$




Dim $(b-a) \sup_{[a,b]} f$ è $S(P_1)$ dove $P_1 = \{a,b\}$ è la partizione "banale"

$(b-a) \inf_{[a,b]} f$ è $s(P_1)$

$$s(P_1) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(P_1)$$

che segue dalla def. di integrale come inf/sup $\square$

2) se $f(x) \equiv c$ in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = (b-a)\,c$$

(segue da 1).

3) $f(x) + g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, e

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, e

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

5) se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

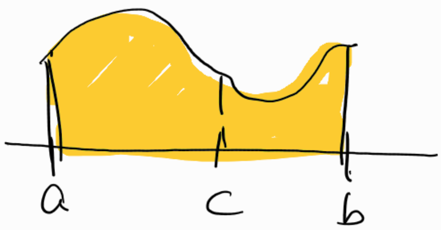
(segue da 3) e 4))

linearità dell'integrale.

6) Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, e $[c,d] \subset [a,b]$, allora $f \in \mathcal{R}(c,d)$

7) Additività dell'integrale rispetto all'intervallo:

Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, e se $c \in (a,b)$, allora



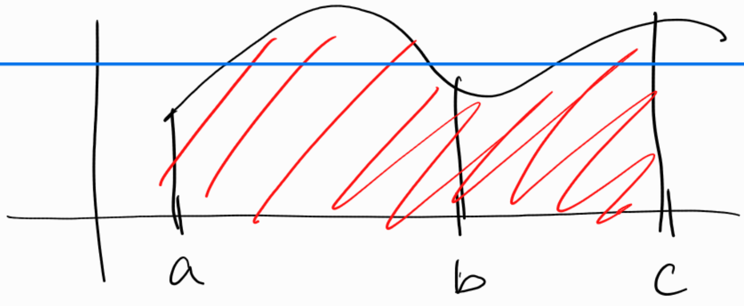

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (*)$$

<u>OSS</u> E' possibile definire $\int_a^b f(x)\,dx$ anche se $b \leq a$

Se $b < a$, poniamo $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

se $b = a$ poniamo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

In questo modo la $(*)$ vale anche se $a, b, c$ sono in un ordine qualsiasi, purché $f$ sia integrabile nell'intervallo più grande



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{= -\int_b^c f(x)\,dx} \quad \text{purche' } f \in \mathcal{R}(a,c)$$

8) Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(monotonia dell'} \textstyle\int)$$

Infatti si ha $S(P;f) \le S(P;g)$ $\forall P$.

Passando all'inf si ha la tesi.