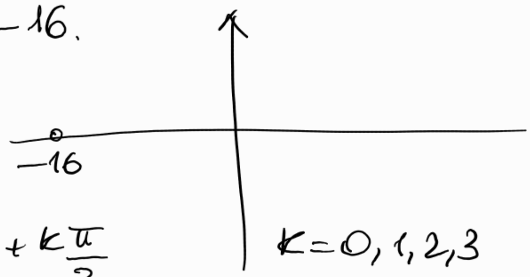
Scomporre il polinomio $P(x) = x^4+16$ nei numeri reali.

<u>1° modo</u> aggiungendo e sottraendo $8x^2$ già fatto

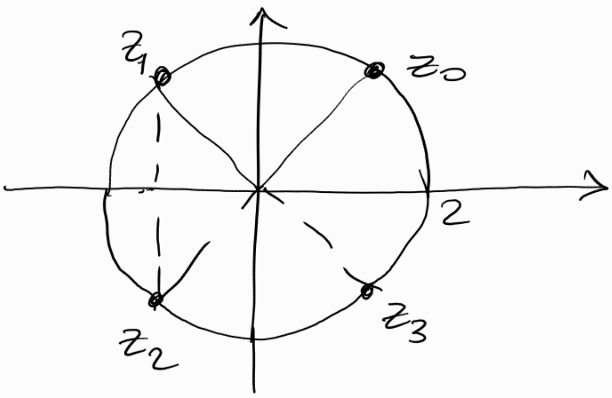
<u>2° modo</u> complessificando il problema $P(z) = z^4+16$, ne trovo gli zeri, che sono le radice quarte di -16.

$$-16 = 16\, e^{i\pi}$$



$$z_k = \underbrace{\sqrt[4]{16}}_{\substack{\shortparallel \\ 2}}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \qquad k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = $$
$$= \sqrt{2}\,(1+i)$$



$$z_1 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}\,(-1+i)$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = \sqrt{2}\,(-1-i) = \overline{z_1}$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = \underbrace{\sqrt{2}\,(1-i) = \overline{z_0}}$$

$$P(z) = z^4+16 = (z-z_0)(z-\overline{z_0})(z-z_1)(z-\overline{z_1}) =$$

$$= \underbrace{((z-\sqrt{2})-\sqrt{2}i)((z-\sqrt{2})+\sqrt{2}i)}\;\underbrace{(z+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}$$

$$= \left((z-\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}i)^2\right) \qquad \left((z+\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}i)^2\right)$$

$$= (z^2-2\sqrt{2}z+2+2) \qquad (z^2+2\sqrt{2}z+2+2) =$$

$$= (z^2-2\sqrt{2}z+4)(z^2+2\sqrt{2}z+4)$$

Prendendo $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+4 = (x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$

Provare a scomporre in modo simile x^6+1 oppure x^6+64.

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\dfrac{\alpha+3i}{1-\alpha i} \in \mathbb{R}$. Per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\alpha+3i}{1-\alpha i} = \frac{\alpha+3i}{1-\alpha i} \cdot \frac{1+\alpha i}{1+\alpha i} = \frac{\alpha+\alpha^2 i+3i-3\alpha}{1+\alpha^2} =$$

$$= \frac{-2\alpha + i(\alpha^2+3)}{1+\alpha^2} = -\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + i\,\frac{\alpha^2+3}{1+\alpha^2} \in \mathbb{R}$$

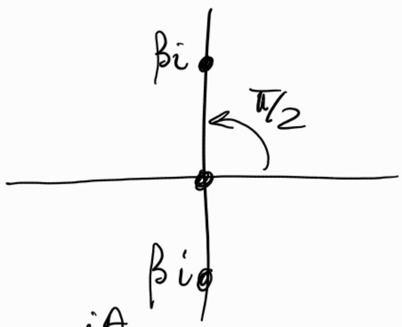
$\Updownarrow$

$\alpha^2+3=0$

falso $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, risolvere l'eq^{ne} $(\bar{z})^3|z|^3 = \beta i$

1) se $\beta=0$ $\quad (\bar{z})^3|z|^3 = 0 \Rightarrow z=0$



2) se $\beta>0$, l'eq^{ne} diventa

$$(\bar{z})^3|z|^3 = \beta e^{i\pi/2}$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

$$(\bar{z})^3 = |z|^3 e^{-i3\theta}$$

L'eq^{ne} diventa

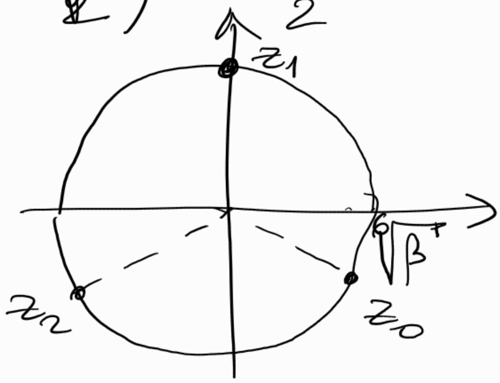
$$|z|^6 e^{-i3\theta} = \beta e^{i\pi/2}$$

$$|z|^6 = \beta \iff |z| = \sqrt[6]{\beta}$$

$$-3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta_k = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \qquad \cancel{(k\in\mathbb{Z})} \qquad k=0,1,2$$

$$z_0 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[6]{\beta}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt[6]{\beta}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$$



$$z_1 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[6]{\beta}\, i$$

$$z_2 = \sqrt[6]{\beta}\, e^{i\frac{7}{6}\pi} = \frac{\sqrt[6]{\beta}}{2}\left(-\sqrt{3}-i\right)$$

3) se $\beta<0$, l'eq^{ne} diventa

$$|z|^6 e^{-i3\theta} = (-\beta)\, e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

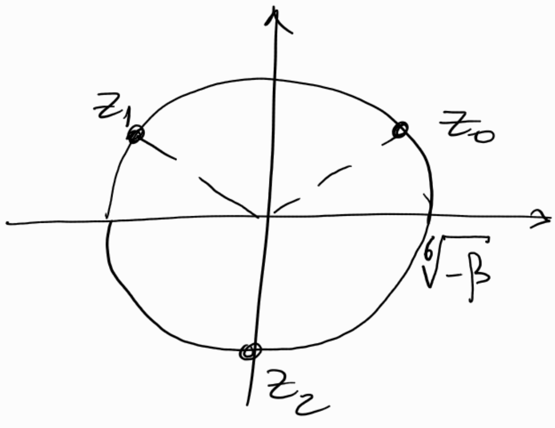
$$|z|^6 = -\beta \iff |z| = \sqrt[6]{-\beta}$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \qquad k = 0,1,2.$$

$$z_0 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt[6]{-\beta}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt[6]{-\beta}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{-\beta}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt[6]{-\beta}\, i$$

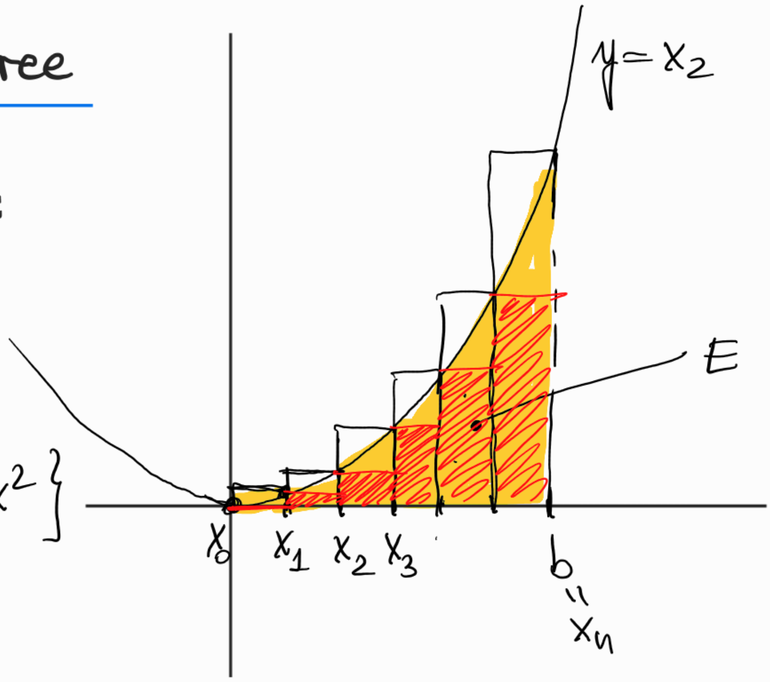


Integrali e calcolo di aree

Vogliamo calcolare l'area di

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 0 \le x \le b, \ 0 \le y \le x^2 \}$$

$b > 0$ fissato.



Divido l'intervallo $[0,b]$ in n intervalli uguali:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{b}{n}, \quad x_2 = \frac{2b}{n}, \dots \quad x_k = \frac{kb}{n}, \dots \quad x_n = \frac{nb}{n} = b$$

$$x_k = \frac{kb}{n} \quad \text{con} \quad k = 0, 1 \dots n.$$

Faccio un'approssimazione dell'area per eccesso

Per ogni intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ considero l'altezza

pari a $M_k = \max\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max\limits_{x \in [-\,]} x^2 = x_k^2$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{b/n} \underbrace{x_k^2}_{\frac{k^2 b^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \frac{k^2 b^2}{n^2} =$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

Lab. Mat

Cerco ora un'approx per difetto dell'area di E

Per ogni intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ prendo come altezza il minimo valore di f

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} x^2 = x_{k-1}^2$$

Approssimazione per difetto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= b/n} \underbrace{x_{k-1}^2}_{= (k-1)^2 \frac{b^2}{n^2}} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=\cancel{1}\,2}^{n} (k-1)^2 =$$

$k-1=h$

$$= \frac{b^3}{n^3} \underbrace{\sum_{h=1}^{n-1} h^2}_{= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}} = \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3}$$

Sappiamo che, $\forall n \in \mathbb{N}_+$ l'area di E verifica

$$\underbrace{\frac{b^3}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3}}_{\to \frac{b^3}{3}} = s_n \le \text{area di } E \le S_n = \underbrace{\frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}}_{\to \frac{b^3}{3}}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \to 2$$

Quindi l'unico valore sensato da attribuire all'area di E è

$$\text{area di } E = |E| = |E|_2 = \frac{b^3}{3}$$

Esercizio Fare la stessa cosa prendendo $f(x) = x^3$ oppure $f(x) = x$ al posto di $f(x) = x^2$,

---

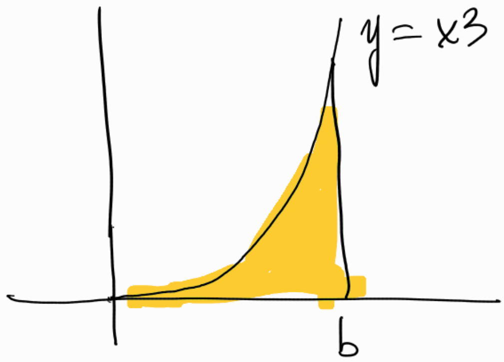
Il procedimento svolto si sintetizza nella scrittura

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}$$

e, per gli esempi dati come esercizio

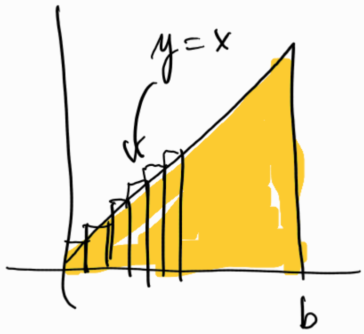
$$f(x) = x^3$$

$$\int_0^b x^3 \, dx = \frac{b^4}{4}$$



$$f(x) = x$$

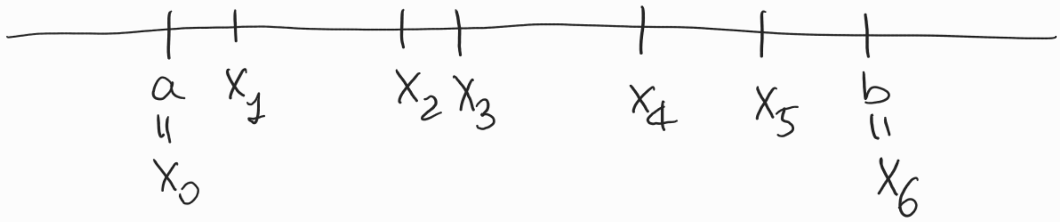
$$\int_0^b x \, dx = \frac{b^2}{2}$$



L'idea è quella di generalizzare il procedimento per funzioni e intervalli diversi.

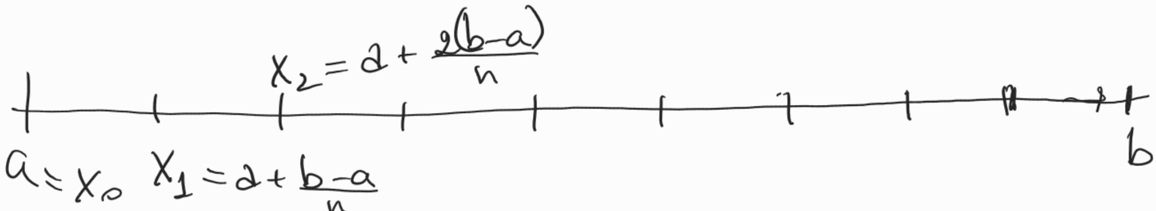
DEF Dato un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, chiamiamo **partizione o suddivisione** di $[a,b]$ un insieme finito di punti

$$\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, \dots x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$$



In particolare, per n fissato, si può considerare la partizione "equispaziata" in cui tutti gli intervallini hanno lunghezza uguale:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} \, , \quad k = 0, \dots, n \right\}$$

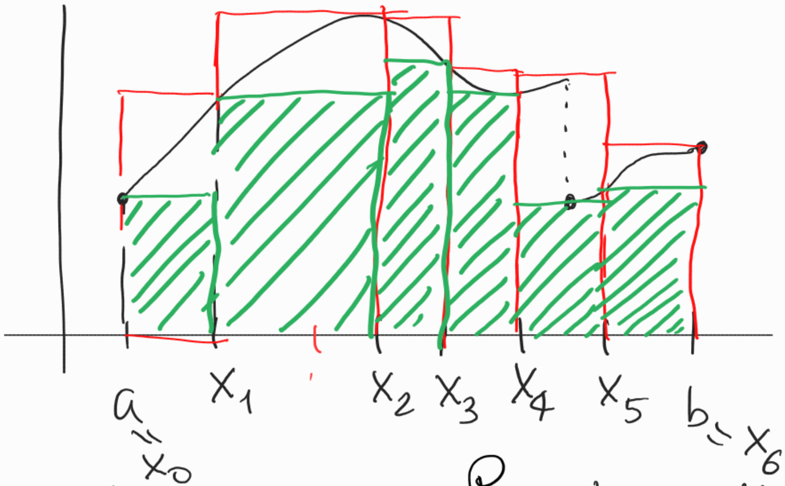


Nel caso della partizione equispaziata P_n abbiamo

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Ne disegno il grafico nel caso di f positiva, tenendo presente che f potrebbe anche essere negativa o cambiare segno.



Fissata f, e fissata una partizione P dell'intervallo, restano determinate le due somme.

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

somma superiore relativa alla partizione P.

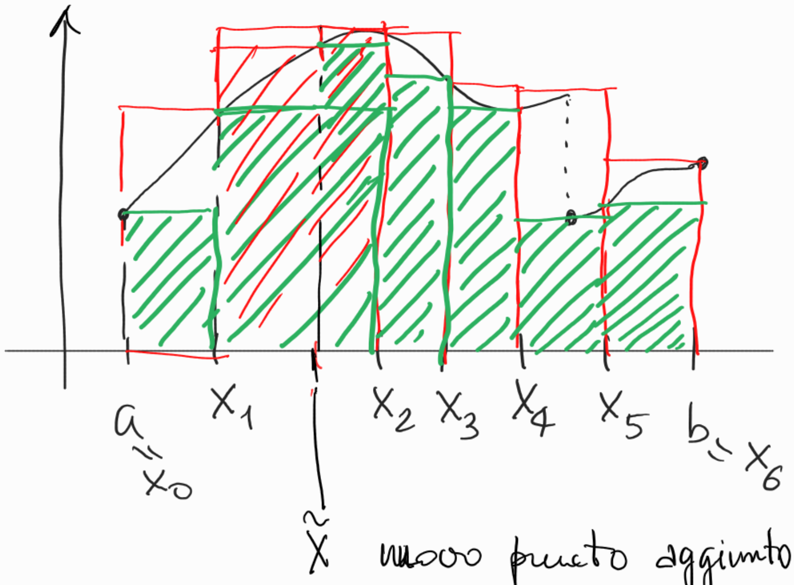
dove $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

dove $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

ovviamente si ha $s(P) \leq S(P)$ $\forall$ partiz. P.

Cosa succede se aggiungo un punto a una partizione?



$\tilde{x}$ nuovo punto aggiunto alla partizione $\mathcal{P}$

Si vede che: se aggiungo un nuovo punto $\tilde{x}$ alla partizione $\mathcal{P}$, ottenendo una nuova partizione $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{\tilde{x}\}$

$$S(\mathcal{P}') \leq S(\mathcal{P})$$

$$s(\mathcal{P}') \geq s(\mathcal{P})$$

In altre parole: aggiungendo punti alla partizione,
le somme superiori decrescono
" " inferiori crescono.

Siano ora $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $[a,b]$.
posso considerare la partizione $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ che è ottenuta da $\mathcal{P}$ oppure da $\mathcal{Q}$ aggiungendo i punti mancanti.

$$s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{Q})$$

Quindi abbiamo ottenuto che
"ogni somma inferiore è $\leq$ di ogni somma superiore"