ANALISI VETTORIALE
LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 12 - 20251218

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Assegnato il campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{x_2}{r^n}, \frac{x_1}{r^n}, 0\right) \qquad \textit{dove } r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$$

se ne calcoli la circuitazione lungo la circonferenza centrata in O *di raggio* $R > 0$ *contenuta nel piano* $\{x_3 = 0\}$, *al variare del parametro* n.

ESERCIZIO 2. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 1, 2x_1 - 1, 2x_3)$$

lungo una linea che congiunge i punti $(0, 0, 0)$ *e* $(1, -1/2, 1)$.

ESERCIZIO 3. *Determinare per quali valori del parametro* a *il campo vettoriale*

$$F(x) = \left(x_2 \ln(x_3) - \frac{1}{2}a^2 x_1 \ln(x_2), x_3^a + x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2}, a x_2 x_3 + \frac{x_1 x_2}{x_3}\right)$$

è conservativo nel suo insieme di definizione. In corrispondenza di questi valori calcolare il potenziale di F *che si annulla in* $(1, 2, 3)$.

ESERCIZIO 4. *Sia* F *il campo vettoriale*

$$F(x) = (2x_1 g(x_3), 0, x_1^2 g(x_3))$$

i. Determinare la funzione $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *tale che* $g(0) = 1$ *e tale che* F *sia conservativo nel suo insieme di definizione.*
ii. Calcolare il lavoro compiuto da F *lungo la curva*

$$x(t) = (t^2 \cos(t), \arctan(t^3), t^2 \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$$

ESERCIZIO 5. *Si spieghi perché la seguente forma differenziale*

$$\omega = \left[2x_1 x_2 - \frac{1}{x_1}\right] dx_1 + x_1^2 dx_2$$

è esatta e se ne calcolino tutti i potenziali.

ESERCIZIO 6. *Sia* $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ *e* $\omega \in C^1(A)$ *una forma differenziale chiusa in* A *e supponiamo che esista una curva chiusa, semplice, regolare a tratti di parametrizzazione* ϕ *avente sostegno* $\gamma = \partial D \subseteq A$, *con* $O \in D$, *e tale che*

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

Si provi che ω *è esatta.*

ESERCIZIO 7. *Calcolare*

$$\int_\gamma \left[x_2 e^{x_1} dx_1 + \left(e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2} \right) dx_2 \right]$$

dove γ *è il sostegno della curva del piano* $\{x_3 = 0\}$ *di parametrizzazione*

$$\gamma : \left\{ x(t) = \left(tg(t) + 2\sin(t), tg^2(t), 0 \right) : t \in [\pi/4, \pi/3] \right\}$$

ESERCIZIO 8. *Determinare per quali* $a \in \mathbb{R}$ *la forma differenziale*

$$\omega = x_2 x_3 (x_2 + 2x_1) dx_1 + x_1 x_3 (2x_2 + x_1) dx_2 + \left[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + a x_3^2 \right] dx_3$$

è esatta. Poi si calcoli, per $a = 1$, *l'integrale della forma differenziale* ω *lungo la curva* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$, *con* $t \in [-\pi, \pi]$.

ESERCIZIO 9. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x) = \left(\frac{x_2^2 + 2x_1 x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{x_2^2 - 2x_1 x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right)$$

si dimostri che F *è conservativo in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *e se ne trovi un potenziale.*

ESERCIZIO 10. *Determinare la funzione* $\phi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *con* $\phi(1) = 1$ *tale che la forma*

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right) dx_1 + x_3 \phi(x_1) dx_2 + \left(\frac{1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} \right) dx_3$$

sia esatta. In corrispondenza di tale ϕ *si trovi la primitiva che si annulla nel punto* $p = (1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 11. *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *una funzione continua q.o., si provi se le seguenti affermazioni sono vere o false*
i. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$,
ii. f *può avere al più un numero finito di asintoti verticali.*

ESERCIZIO 12. *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{k}(1 - kx) & x \in [0, 1/k] \\ 0 & x \in [1/k, 1] \end{cases}$$

si calcoli il limite puntuale della successione $\{f_k\} \subseteq L^2(0,1)$, *il limite degli integrali e si commenti il risultato ottenuto alla luce del teorema di convergenza dominata.*

ESERCIZIO 13. *Sia* $\chi_k(x) = \chi_{[-k,k]}(x)$ *(cioè la funzione caratteristica dell'intervallo* $[-k, k]$*), si dimostri che*

i. se $h \in L^1(\mathbb{R})$ *allora* $h_k = h\chi_k \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $h_k \longrightarrow h$ *in* $L^1(\mathbb{R})$

ii. se $h \in L^2(\mathbb{R})$ *allora* $h_k = h\chi_k \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $h_k \longrightarrow h$ *in* $L^2(\mathbb{R})$

ESERCIZIO 14. *Assegnata la successione*

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} j 2^{-j} \chi_{[0,1/j]}(x) \qquad x \in [0, 1]$$

e definita f(x) *come il limite puntuale della successione, si usi il teorema di convergenza monotona per calcolare*

$$\int_{[0,1]} f(x)dx$$

ESERCIZIO 15. *Posto*

$$X = L^2(\mathbb{R}) \qquad e \qquad Y = \left\{ f \text{ misurabile in } \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < +\infty \right\}$$

si mostri la correttezza delle seguenti affermazioni

i. $X \subseteq Y$ *e l'inclusione è stretta,*

ii. $f_n = \chi_{[n,n+1]} \not\longrightarrow 0$ *in* X,

iii. $f_n \longrightarrow 0$ *in* Y,

iv. se $g_n \longrightarrow 0$ *in* X *allora* $g_n \longrightarrow 0$ *in* Y.

ESERCIZIO 16. *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}$$

si determini

i. l'insieme di convergenza E*,*

ii. il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*

iii. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie risulta derivabile.*

ESERCIZIO 17. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} x^{2k}$$

i. si determini l'insieme di convergenza $E \subseteq \mathbb{R}$*,*

ii. si determini il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*

iii. si calcoli esplicitamente, se possibile, la somma della serie.

ESERCIZIO 18. *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}$$

si determini

i. l'insieme di convergenza E*,*

ii. il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*

iii. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie risulta derivabile,*

iv. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie converge in* L^2.

ESERCIZIO 19. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} x^{2k}$$

i. si determini l'insieme di convergenza $E \subseteq \mathbb{R}$*,*

ii. si determini il sottoinsieme di E *in cui la serie converge in* L^1*,*

iii. si calcoli esplicitamente, se possibile, la somma della serie.

ESERCIZIO 20. *Data la seguente serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} [f(x)]^{2(k+1)}$$

se ne calcoli la somma, spiegando dove converge puntualmente ed uniformemente.

ESERCIZIO 21. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

i. si determini l'insieme di convergenza puntuale,
ii. si determini l'insieme di convergenza uniforme,
iii. si determini l'insieme di convergenza L^2,
iv. si scriva la funzione somma (dove esiste).

ESERCIZIO 22. *Si risolva tramite lo sviluppo in serie di potenze la seguente equazione differenziale*

$$u'(t) - u(t) = e^t$$

ESERCIZIO 23. *Si ricavi lo spazio vettoriale delle soluzioni della seguente equazione differenziale*

$$u''(t) - 2tu'(t) = 0$$

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Assegnato il campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{x_2}{r^n}, \frac{x_1}{r^n}, 0\right) \qquad \textit{dove } r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$$

se ne calcoli la circuitazione lungo la circonferenza centrata in O *di raggio* $R > 0$ *contenuta nel piano* $\{x_3 = 0\}$*, al variare del parametro* n.

DISCUSSIONE. Parametrizziamo la circonferenza C nel seguente modo

$$x(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

è ben noto che tale parametrizzazione è regolare. Calcoliamo la circuitazione del campo lungo C, ricordando la definizione di tale integrale, in modo da ottenere

$$\begin{aligned}
\oint_C F(x) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{x_2(t)}{r^n(t)}, \frac{x_1(t)}{r^n(t)}, 0\right) \cdot x'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin(t)}{R^n\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right]^{n/2}}, \frac{R\cos(t)}{R^n\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right]^{n/2}}, 0\right) \cdot R(-\sin(t), \cos(t), 0)dt \\
&= \frac{1}{R^{n-2}} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{R^{n-2}}
\end{aligned}$$

Notiamo che tale integrale (lungo una curva chiusa) non è mai nullo e, per $n = 2$, il risultato è indipendente dal raggio della circonferenza C. ■

ESERCIZIO 2. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 1, 2x_1 - 1, 2x_3)$$

lungo una linea che congiunge i punti $(0, 0, 0)$ *e* $(1, -1/2, 1)$.

DISCUSSIONE. Ricordando che

$$F_1(x) = 2x_2 + 1 \qquad F_2(x) = 2x_1 - 1 \qquad F_3(x) = 2x_3$$

il campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ che è un insieme semplicemente connesso. Inoltre poiché vale

$$\operatorname{rot}F(x) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 2x_2 + 1 & 2x_1 - 1 & 2x_3 \end{pmatrix} = O = (0, 0, 0)$$

Quindi F è conservativo, in quanto irrotazionale in un aperto stellato, per il teorema di Poincaré. Ne segue che il lavoro richiesto non dipende dal percorso che congiunge $(0, 0, 0)$ e $(1, -1/2, 1)$ ma solo dagli estremi. Il segmento che congiunte i due punti ha equazione parametriche

$$x(t) = (t, -t/2, = t) \qquad \text{con } t \in [0, 1]$$

Ne segue che il lavoro richiesto è dato da

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \Big[F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_2'(t) + F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_3'(t)\Big] dt \\ &= \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2}(1 - 2t) + t\right] dt = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Un altro modo possibile di procedere è costruire un potenziale del campo vettoriale, i potenziali $U(x, y, z)$ di F devono soddisfare le relazioni

$$\partial_1 U(x) = 2x_2 + 1 \qquad \partial_2 U(x) = 2x_1 - 1 \qquad \partial_3 U(x) = 2x_3$$

Integrando rispetto a x_1 la prima relazione si trova

$$U(x) = 2x_1x_2 + x_1 + g(x_2, x_3)$$

La funzione $g(x_2, x_3)$ si determina derivando rispetto a x_2 e imponendo l'uguaglianza con $\partial_2 U(x)$, cioè

$$2x_1 + \partial_2 g(x_2, x_3) = 2x_1 - 1 \qquad \text{da cui} \qquad g(x_2, x_3) = -x_2 + f(x_3)$$

Dunque abbiamo che $U(x) = 2x_1x_2 + x_1 - x_2 + f(x_3)$. Derivando rispetto a x_3 e imponendo l'uguaglianza con la terza relazione ottenuta prima si trova

$$f'(x_3) = 2x_3 \qquad \text{cioè} \qquad f(x_3) = x_3^2 + c$$

In definitiva

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_1 - x_2 + x_3^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Il lavoro richiesto vale

$$W = U\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) - U(0, 0, 0) = \frac{3}{2}$$

in perfetto accordo con il calcolo precedente. ■

ESERCIZIO 3. *Determinare per quali valori del parametro* a *il campo vettoriale*

$$F(x) = \left(x_2 \ln(x_3) - \frac{1}{2}a^2 x_1 \ln(x_2), x_3^a + x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2}, a x_2 x_3 + \frac{x_1 x_2}{x_3}\right)$$

è conservativo nel suo insieme di definizione. In corrispondenza di questi valori calcolare il potenziale di F *che si annulla in* $(1, 2, 3)$*.*

DISCUSSIONE. Il campo F è definito in $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_3 > 0\}$, insieme semplicemente connesso dello spazio, quindi F è conservativo in A se e solo se è irrotazionale, cioè se e solo se rot(F) = O. Con alcuni calcoli troviamo che

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ x_2 \ln(x_3) - \dfrac{a^2 x_1}{2} \ln(x_2) & x_3^a + x_1 \ln(x_3) - \dfrac{x_1^2}{x_2} & a x_3 x_2 + \dfrac{x_1 x_2}{x_3} \end{pmatrix}$$
$$= \left(a x_3 - a x_3^{a-1}, 0, \left(a^2 - 4\right) \frac{x_1}{2x_2} \right)$$

dalla terza componente del rotore si trova che deve essere $a = \pm 2$. Sostituendo questi valori nella prima componente si vede che $\mathrm{rot}(F) = (0,0,0)$ se e solo se $a = 2$.
Adesso possiamo cercare i potenziali U del campo F conservativo

$$F(x) = \left(x_2 \ln(x_3) - 2x_1 \ln(x_2), x_3^2 + x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2}, 2x_3 x_2 + \frac{x_1 x_2}{x_3} \right)$$

sapendo che U deve verificare le seguenti relazioni

$$\partial_1 U(x) = x_2 \ln(x_3) - 2x_1 \ln(x_2) \qquad \partial_2 U(x) = x_3^2 + x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2} \qquad \partial_3 U(x) = 2x_3 x_2 + \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

Integrando rispetto a x_1 la prima relazione si trova

$$U(x) = x_1 x_2 \ln(x_3) - x_1^2 \ln(x_2) + g(x_2, x_3)$$

Deriviamo rispetto a x_2 e imponiamo la seconda relazione

$$x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2} + \partial_2 g(x_2, x_3) = x_3^2 + x_1 \ln(x_3) - \frac{x_1^2}{x_2}$$
$$\text{quindi} \qquad \partial_2 g(x_2, x_3) = x_3^2 \qquad \text{da cui} \qquad g(x_2, x_3) = x_2 x_3^2 + f(x_3)$$

Quindi si ha $U(x) = x_1 x_2 \ln(x_3) - x_1^2 \ln(x_2) + x_2 x_3^2 + f(x_3)$. Deriviamo rispetto a x_3 e imponiamo l'ultima relazione

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + 2x_2 x_3 + f'(x_3) = 2x_2 x_3 + \frac{x_1 x_2}{x_3} \qquad \text{cioè} \qquad f'(x_3) = 0 \qquad \text{e otteniamo} \qquad f(x_3) = c$$

Concludiamo che i potenziali sono dati da

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \ln(x_3) - x_1^2 \ln(x_2) + x_2 x_3^2 + c$$

imponendo la condizione $U(1,2,3) = 0$ si trova $c = \ln(2) - 2\ln(3) - 18$. ■

ESERCIZIO 4. *Sia* F *il campo vettoriale*

$$F(x) = (2x_1 g(x_3), 0, x_1^2 g(x_3))$$

i. Determinare la funzione $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *tale che* $g(0) = 1$ *e tale che* F *sia conservativo nel suo insieme di definizione.*
ii. Calcolare il lavoro compiuto da F *lungo la curva*

$$x(t) = (t^2 \cos(t), \arctan(t^3), t^2 \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$$

DISCUSSIONE. i. Il campo $F = (F_1, F_2, F_3)$ è definito in $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso, in quanto convesso, quindi il campo è conservativo se e solo se è irrotazionale. Quindi g deve essere tale che

$$\partial_3 F_1(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 F_3(x_1, x_2, x_3)$$

cioè tale che $2x_1 g'(x_3) = 2x_1 g(x_3)$, quindi g deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} g'(s) = g(s) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

quindi $g(s) = e^s$.

ii. Il punto iniziale della curva è $(0,0,0)$, mentre il punto finale è $(-\pi^2, \arctan(\pi^3), 0)$, quindi se determiniamo un potenziale U del campo F allora il lavoro compiuto lungo la curva γ vale

$$\int_\gamma F \cdot ds = U\Big(-\pi^2, \arctan(\pi^3), 0\Big) - U(0,0,0)$$

Calcoliamo ora un potenziale U, cioè una funzione che verifica le seguenti condizioni

$$\partial_1 U(x) = 2x_1 e^{x_3} \qquad \partial_2 U(x) = 0 \qquad \partial_3 U(x) = x_1^2 e^{x_3}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si trova

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_3} + \phi(x_2, x_3)$$

Se deriviamo rispetto a x_2 e imponiamo la seconda condizione otteniamo immediatamente che $\partial_2\phi(x) = 0$, quindi $\phi(x) = \phi(x_3)$ e allora

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_3} + \phi(x_3)$$

Per determinare ψ deriviamo U rispetto a x_3 e imponiamo la terza condizione per trovare

$$x_1^2 e^{x_3} = x_1^2 e^{x_3} + \phi'(x_3)$$

quindi ϕ è costante. Siccome ci basta determinare UN potenziale (e non tutti i potenziali) possiamo scegliere $\phi \equiv 0$, quindi

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_3}$$

e il lavoro compiuto da F lungo la curva risulta valere $U(-\pi^2, \arctan(\pi^3), 0) - U(0,0,0) = \pi^4$. ■

ESERCIZIO 5. *Si spieghi perché la seguente forma differenziale*

$$\omega = \left[2x_1x_2 - \frac{1}{x_1}\right] dx_1 + x_1^2 dx_2$$

è esatta e se ne calcolino tutti i potenziali.

DISCUSSIONE. ω è definita in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = 0\}$ che è un sottoinsieme dello spazio avente due componenti connesse, $\{x_1 > 0\}$ e $\{x_1 < 0\}$, ognuna delle quali è semplicemente connessa, in quanto aperto convesso. Quindi se ω è chiusa in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = 0\}$, allora è anche esatta, ed In effetti ω è chiusa, visto che

$$2x_1 = \partial_2\left[2x_1x_2 - \frac{1}{x_1}\right] = \partial_1[x_1^2] = 2x_1$$

Cerchiamo ora di calcolare le primitive di ω. Integrando rispetto a x_2 il secondo coefficiente della forma otteniamo

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + \phi(x_1)$$

ma allora, dovendo essere $\partial_1 U(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - \frac{1}{x_1}$, abbiamo che

$$\phi'(x_1) = -\frac{1}{x_1}$$

da cui ricaviamo

$$\phi(x) = \begin{cases} -\ln(-x_1) + c^- & \text{se } x_1 < 0 \\ -\ln(x_1) + c^+ & \text{se } x_1 > 0 \end{cases} \qquad \text{con } c^-, c^+ \in \mathbb{R}$$

da cui otteniamo che

$$U(x, y) = \begin{cases} x_1^2 x_2 - \ln(-x_1) + c^- & \text{se } x_1 < 0 \\ x_1^2 x_2 - \ln(x_1) + c^+ & \text{se } x_1 > 0 \end{cases} \qquad \text{con } c^-, c^+ \in \mathbb{R}$$

Sottolineiamo che le due costanti additive sono indipendenti l'una dall'altra, quindi le primitive della forma differenziale sono tante quante i punti del piano $\mathbb{R}^2$. ■

Esercizio 6. *Sia* $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ *e* $\omega \in C^1(A)$ *una forma differenziale chiusa in* A *e supponiamo che esista una curva chiusa, semplice, regolare a tratti di parametrizzazione* ϕ *avente sostegno* $\gamma = \partial D \subseteq A$*, con* $O \in D$*, e tale che*

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

Si provi che ω *è esatta.*

Discussione. Supponiamo, per semplicità, che $D = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, in modo che $\gamma = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, sia $\omega = a(x)dx_1 + b(x)dx_2$ e consideriamo l'aperto

$$\tilde{A} = A \setminus \{(x_1, 0), x_1 > 0\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Siccome $\tilde{A}$ è semplicemente connesso, esiste un potenziale $U(x_1, x_2) \in C^2(\tilde{A})$ tale che

$$\nabla U(x_1, x_2) = (a(x_1, x_2), b(x_1, x_2)) \qquad \text{e} \qquad U(-1, 0) = 0$$

Poiché ω (o meglio i suoi coefficienti $a(x_1, x_2)$ e $b(x_1, x_2)$) è definita in tutto A ed è di classe C^1, per provare la tesi sarà sufficiente mostrare che U può essere esteso per continuità in tutto l'aperto A, cioè prolungata sulla semiretta, quindi dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} U(\overline{x}_1, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^-} U(\overline{x}_1, \varepsilon) \qquad \text{per ogni } \overline{x}_1 \in (0, +\infty)$$

Siccome in $\tilde{A}$ la forma è esatta possiamo scrivere che

$$U(\overline{x}_1, \varepsilon) = \begin{cases} \displaystyle\int_{s_+ \cup \gamma_+} \omega & \text{per } \varepsilon > 0 \\ \displaystyle\int_{s_- \cup \gamma_-} \omega & \text{per } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

avendo scelto un cammino composto di due tratti concatenati dove $\gamma_\pm$ è l'arco di circonferenza avente come estremi (rispettivamente) i punti $(-1, 0)$ e $(\sqrt{1-\varepsilon^2}, \pm\varepsilon)$ e $s_\pm$ è (rispettivamente) il segmento orizzontale di estremi $(\sqrt{1-\varepsilon^2}, \pm\varepsilon)$ e $(x_0, \pm\varepsilon)$.
A questo punto la tesi equivale a mostrare che

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \left[\int_{s_+ \cup \gamma_+} \omega - \int_{s_- \cup \gamma_-} \omega \right] = 0$$

per il teorema di Lagrange (si ricordi che ω è di classe C^1!), segue che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+ \cup s_+} \omega - \int_{\gamma_- \cup s_-} \omega &= \int_{\gamma_+} \omega + \int_{s_+} \omega - \int_{\gamma_-} \omega - \int_{s_-} \omega \\ &= \int_{\gamma_+} \omega - \int_{\gamma_-} \omega + \int_{\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{x_0} [a(t, \varepsilon) - a(t, -\varepsilon)]\,dt \\ &= \int_{\gamma_+} \omega - \int_{\gamma_-} \omega + 2\varepsilon \int_{\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{x_0} \partial_2 a(t, \eta(\varepsilon))dt \end{aligned}$$

e passando al limte per ε che tende a zero troviamo che

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} [U(x_0, \varepsilon) - U(x_0, -\varepsilon)] = \int_\gamma \omega = 0$$

il che garantisce la possibilità di estendere il potenziale U su tutto A. ∎

Esercizio 7. *Calcolare*

$$\int_\gamma \left[x_2 e^{x_1} dx_1 + \left(e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2} \right) dx_2 \right]$$

dove γ *è il sostegno della curva del piano* $\{x_3 = 0\}$ *di parametrizzazione*

$$\gamma : \left\{ x(t) = \left(tg(t) + 2\sin(t), tg^2(t), 0 \right) : t \in [\pi/4, \pi/3] \right\}$$

Discussione. Il calcolo dell'integrale applicando la definizione è evidentemente complicato, quindi cerchiamo un modo più semplice, che eviti eccessivi tecnicismi. La forma differenziale $\omega = x_2 e^{x_1} dx_1 + \left(e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2}\right) dx_2$ è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ privato del piano $\{x_2 = 0\}$, inoltre la forma ω è chiusa dato che

$$\partial_2 x_2 e^{x_1} = e^{x_1} = \partial_1 \left(e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2}\right) \qquad \text{e} \qquad \partial_3 x_2 e^{x_1} = \partial_3 \left(e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2}\right) = 0$$

quindi ω è localmente esatta. In più possiamo dire che è esatta in tutto il semispazio $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\}$ che è semplicemente connesso. Allora cerchiamo una primitiva U di ω, cioè una funzione che verifichi le condizioni

$$\partial_1 U(x) = x_2 e^{x_1} \qquad \partial_2 U(x) = e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2} \qquad \partial_3 U(x) = 0$$

Integrando rispetto a x_1 la prima relazione si trova

$$U(x) = x_2 e^{x_1} + g(x_2, x_3)$$

La funzione g si determina derivando rispetto alle altre variabili, infatti imponendo le altre relazioni troviamo che

$$e^{x_1} + \partial_2 g(x_2, x_3) = e^{x_1} + \frac{\ln(x_2^2)}{x_2} \qquad \text{e} \qquad \partial_3 g(x_2, x_3) = 0$$

da cui $g(x) = \ln^2(x_2) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Riassumendo abbiamo provato che

$$U(x) = x_2 e^{x_1} + \ln^2(x_2)$$

è una primitiva in A (con c = 0) e siccome la curva γ è contenuta nel semipiano A e congiunge il punto $p = \left(1 + \sqrt{2}, 1, 0\right)$ (punto iniziale della curva) al punto $q = \left(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\right)$ (punto finale). Per la caratterizzazione delle forme differenziali esatte si ha che l'integrale richiesto è dato da

$$U(q) - U(p) = 3e^{2\sqrt{3}} - e^{1+\sqrt{2}} + \ln^2\left(\sqrt{3}\right)$$

il che conclude lo svolgimento. ∎

Esercizio 8. *Determinare per quali* $a \in \mathbb{R}$ *la forma differenziale*

$$\omega = x_2 x_3 (x_2 + 2x_1) dx_1 + x_1 x_3 (2x_2 + x_1) dx_2 + \left[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + a x_3^2\right] dx_3$$

è esatta. Poi si calcoli, per $a = 1$*, l'integrale della forma differenziale* ω *lungo la curva* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$*, con* $t \in [-\pi, \pi]$.

Discussione. i. La forma è definita in tutto $\mathbb{R}^3$, per il teorema di Poincaré (essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso) la forma è esatta se e solo se è chiusa, quindi verifichiamo le condizioni sui coefficienti

$$\begin{aligned} &\partial_2[x_2 x_3 (x_2 + 2x_1)] = 2x_3(x_1 + x_2) && \partial_1[x_1 x_3 (x_1 + 2x_2)] = 2x_3(x_1 + x_2) \\ &\partial_3[x_2 x_3 (x_2 + 2x_1)] = x_2(x_2 + 2x_1) && \partial_1[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + a x_3^2] = x_2(2x_1 + x_2) \\ &\partial_3[x_2 x_3 (2x_2 + x_1)] = x_1(x_1 + 2x_2) && \partial_2[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + a x_3^2] = x_1(x_1 + 2x_2) \end{aligned}$$

quindi ω è esatta, indipendentemente dal valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, e i suoi potenziali sono le funzioni

$$U(x) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_3 + \frac{a}{3} x_3^3 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

ii. L'integrale richiesto è semplicemente la differenza dei valori assunti da un potenziale (per a = 1) agli estremi del cammino individuato dalla parametrizzazione, quindi

$$L = \int_\gamma \omega = U(1, 0, \pi^2) - U(1, 0, \pi^2) = 0$$

naturalmente tale valore è indipendente dalla particolare curva che connette i due punti e quindi è costante anche rispetto a variazioni di γ che lasciano gli estremi inalterati. ∎

ESERCIZIO 9. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x) = \left(\frac{x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right)$$

si dimostri che F *è conservativo in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *e se ne trovi un potenziale.*

DISCUSSIONE. L'esercizio può essere risolto in due modi differenti, e il più rapido è cercare subito un potenziale, perché l'esistenza di un potenziale U implica immediatamente la conservatività del campo. Allora osserviamo che deve valere

$$U(x_1, x_2) = \frac{Ax_1 + Bx_2}{x_1^2 + x_2^2} + c \qquad \text{da cui segue}$$

$$\partial_1 U(x) = \frac{-Ax_1^2 - 2Bx_1x_2 + Ax_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\partial_2 U(x) = \frac{Bx_1^2 - 2Ax_1x_2 - Bx_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

che ci permette di determinare la seguente espressione per i potenziali di ω

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Volendo procedere con maggiore calma è possibile mostrare che la forma differenziale è chiusa, infatti abbiamo che

$$\partial_2 \left[\frac{x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right] = 2\frac{x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\partial_1 \left[\frac{x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right] = 2\frac{x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

il prolema è che il dominio di ω non è semplicemente connesso (tantomeno stellato), per cui non possiamo sfruttare il teorema di Poincaré per concludere che la 1-forma differenziale è esatta.

■

ESERCIZIO 10. *Determinare la funzione* $\phi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *con* $\phi(1) = 1$ *tale che la forma*

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_2x_3}{x_1^2} \right) dx_1 + x_3\phi(x_1)dx_2 + \left(\frac{1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} \right) dx_3$$

sia esatta. In corrispondenza di tale ϕ *si trovi la primitiva che si annulla nel punto* $p = (1, 1, 1)$.

DISCUSSIONE. La forma differenziale ha dominio massimale $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1x_3 = 0\}$, D è un aperto dello spazio unione di 4 aperti disgiunti, connessi e semplicemente connessi, quindi ω è aperta se e solo se è chiusa, cioè se e solo se valgono le seguenti relazioni

$$\partial_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_2x_3}{x_1^2} \right) = -\frac{1}{x_1^2}x_3 = x_3\phi'(x_1) = \partial_1 (x_3\phi(x_1)) \qquad \text{cioè} \qquad \phi'(x_1) = -\frac{1}{x_1^2}$$

$$\partial_3 (x_3\phi(x_1)) = \phi(x_1) = \frac{1}{x_1} = \partial_2 \left(\frac{1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} \right) \qquad \text{cioè} \qquad \phi(x_1) = \frac{1}{x_1}$$

$$\partial_1 \left(\frac{1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} \right) = -\frac{x_2}{x_1^2} = \partial_3 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_2x_3}{x_1^2} \right) \qquad \text{che è verificata}$$

Poiché le due condizioni relative alla funzione ϕ sono compatibili tra loro e soddisfano la richiesta $\phi(1) = 1$, otteniamo che ω è chiusa, quindi esatta e il gradiente di ogni sua primitiva ha un'espressione del tipo

$$\nabla U(x) = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_2x_3}{x_1^2}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} \right) \qquad x \in D$$

da cui ricaviamo che

$$U(x) = \ln(|x_1|) + \ln(|x_3|) + \frac{x_2 x_3}{x_1} + c_j \qquad \text{per } x \in D \text{ e } c_j \in \mathbb{R} \text{ per } j = 1,2,3,4$$

dove c_j è una costante additiva della primitiva nella j-sima componente connessa di $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, dove $D_1 = \{x_1, x_3 > 0\}$, $D_1 = \{x_1 < 0 < x_3\}$, $D_1 = \{x_1, x_3 < 0\}$ e $D_1 = \{x_1 > 0 > x_3\}$. Infine notiamo che $U(1,1,1) = 1 + c_1$, quindi le primitive cercate hanno $c_1 = -1$, ma non possiamo dire nulla riguardo $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, quindi possiamo concludere dicendo che non è corretto aver usato l'articolo determinativo nel testo dell'esercizio... ■

ESERCIZIO 11. *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *una funzione continua q.o., si provi se le seguenti affermazioni sono vere o false*
i. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$,
ii. f *può avere al più un numero finito di asintoti verticali.*

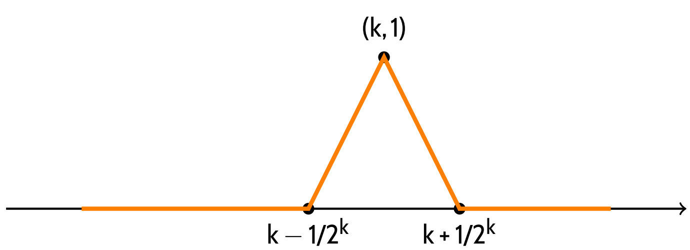
DISCUSSIONE. i. Cominciamo osservando che una funzione del tipo

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

non risponde alla nostra domanda, perché le funzioni nello spazio $L^2(\mathbb{R})$ sono rappresentanti di classi di funzioni e la f_0 appena proposta è nulla quasi ovunque, quindi $f_0 \in [0]$, cioè f_0 è solo un rappresentante della classe di equivalenza della funzione nulla. Questo primo esempio suggerisce che dobbiamo pensare qualcosa di più elaborato, per esempio consideriamo la funzione

$$f_1(x) = \begin{cases} 2^k\left[x - (k - 1/2^k)\right] & \text{se } x \in \left[k - \dfrac{1}{2^k}, k\right] \\ -2^k\left[x - (k + 1/2^k)\right] & \text{se } x \in \left[k, k + \dfrac{1}{2^k}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

nella figura che segue riportiamo, sperando sia utile per comprendere meglio lo svolgimento, un tratto del grafico della funzione f_1



La funzione f_1 è continua, in quanto è una funzione affine a tratti che si raccorda con continuità, quindi mostriamo che $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$, infatti, per le proprietà dell'integrazione secondo Lebesgue, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^2 dx &= \sum_{k \geq 1} \left[\int_{k-1/2^k}^{k} |f_1(x)|^2 dx + \int_{k}^{k+1/2^k} |f_1(x)|^2 dx \right] \\
&= \sum_{k \geq 1} \left[\int_{k-1/2^k}^{k} 2^{2k}\left[x - (k - 1/2^k)\right]^2 dx \right] + \sum_{k \geq 1} \left[\int_{k}^{k+1/2^k} 2^{2k}\left[x - (k + 1/2^k)\right]^2 dx \right] \\
&= \sum_{k \geq 1} \left[\frac{2^{2k}}{3}\left(x - k + \frac{1}{2^k}\right)^3 \right]_{k-1/2^k}^{k} + \sum_{k \geq 1} \left[\frac{2^{2k}}{3}\left(x - k - \frac{1}{2^k}\right)^3 \right]_{k}^{k+1/2^k} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k}}{3} \cdot \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k}}{3} \cdot \frac{1}{2^{3k}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Quindi f_1 è la funzione desiderata, visto che abbiamo provato che $f_1 \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ e adesso osserviamo che non esiste $\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_1(x)$, in quanto

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_1(k) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \longrightarrow +\infty} f_1\left(k + \frac{1}{2}\right) = 0$$

ii. Per costruire un esempio che risponda alla seconda questione cominciamo ricordando che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1/2}} dx = \int_0^{1/2} \left| \frac{1}{x^{1/4}} \right|^2 dx = \sqrt{2}$$

da cui possiamo definire la seguente funzione

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k (x-k)^{1/4}} & \text{se } x \in \left(k, k + \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che f_2 è continua quasi ovunque, visto che ha discontinuità solo nell'insieme $\{k, k+1/2 : k \in \mathbb{N}\}$ che ha misura nulla, essendo un insieme formato da una quantità numerabile di punti isolati. Resta da mostrare che $f_2 \in L^2$, quindi svolgiamo alcuni calcoli grazie alle proprietà di numerabile additività dell'integrale secondo Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} |f_2(x)|^2 dx = \sum_{k \geq 0} \left[\int_k^{k+1/2} |f_2(x)|^2 dx \right] = \sum_{k \geq 0} \left[\int_k^{k+1/2} \left[\frac{1}{3^k (x-k)^{1/4}} \right]^2 dx \right] = \sum_{k \geq 0} \left[\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{3^k t^{1/4}} \right]^2 dt \right]$$
$$= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^{2k}} \left[\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt \right] = \sqrt{2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{9^k} = \frac{9}{8} \sqrt{2}$$

l'idea insita nella costruzione di f_2 è che è possibile costruire una funzione con infiniti asintoti verticali il cui sottografico circoscriva un'area finita, e la costruzione è fatta scalando oppurtunamente l'area sottostante il grafico di $1/\sqrt{x}$! ■

ESERCIZIO 12. *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{k}(1-kx) & x \in [0, 1/k] \\ 0 & x \in [1/k, 1] \end{cases}$$

si calcoli il limite puntuale della successione $\{f_k\} \subseteq L^2(0,1)$*, il limite degli integrali e si commenti il risultato ottenuto alla luce del teorema di convergenza dominata.*

DISCUSSIONE. Osserviamo subito che la funzione è diversa da zero solo nell'intervallo $[0, 1/k]$, la cui misura tende a zero al divergere di k, quindi possiamo dire che la funzione tende a 0 q.o. in $[0,1]$. Puntualmente abbiamo che

$$f_k(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0,1] \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

Dal punto di vista dell'integrale abbiamo che

$$\int_{[0,1]} |f_k(x)|^2 dx = \int_{[0,1/k]} k(1-kx)^2 dx = -\frac{1}{3k}(1-kx)^3 \Big]_0^{1/k} = \frac{1}{3} \qquad \text{per ogni } k$$

essendo tale valore costante (e non nullo) possiamo dire che la successione di funzioni non converge a 0 in $L^2(0,1)$, nonostante converga alla funzione nulla q.o., in particolare non può esistere una funzione sommabile in $[0,1]$ che domini tutte le f_k, altrimenti (per il teorema di Lebesgue) la successione degli integrali dovrebbe essere infinitesima. ■

ESERCIZIO 13. *Sia* $\chi_k(x) = \chi_{[-k,k]}(x)$ *(cioè la funzione caratteristica dell'intervallo* $[-k,k]$*), si dimostri che*

i. se $h \in L^1(\mathbb{R})$ *allora* $h_k = h\chi_k \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $h_k \longrightarrow h$ *in* $L^1(\mathbb{R})$

ii. se $h \in L^2(\mathbb{R})$ *allora* $h_k = h\chi_k \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $h_k \longrightarrow h$ *in* $L^2(\mathbb{R})$

DISCUSSIONE. i. Osseriviamo subito che le funzioni h_k sono delle funzioni misurabili visto che, per ogni aperto A, vale

$$h_k^{-1}(A) = h^{-1}(A) \cap \chi_k^{-1}(A)$$

e l'intersezione di due insiemi misurabili secondo Lebesgue è misurabile, inoltre abbiamo che

$$0 \le |h_k(x)| \le |h(x)|$$

quindi $h_k \in L^1(\mathbb{R})$ essendo misurabile e maggiorata da una funzione sommabile. Per provare la prima affermazione basta osservare che, per definizione di funzione caratteristica dell'intervallo $[-k, k]$, vale

$$h_k(x) \longrightarrow h(x) \qquad \text{q.o.} \qquad \text{cioè} \qquad |h_k(x) - h(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}$$

inoltre abbiamo anche che

$$0 \le |h_k(x) - h(x)| \le 2|h(x)| \qquad \text{con } h \in L^1(\mathbb{R})$$

e l'affermazione segue dal teorema di Lebesgue.
In $L^2(\mathbb{R})$ il ragionamento è analogo, basta osservare che

$$\|h_k - h\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |h_k(x) - h(x)|^2\, dx\right]$$

e che

$$|h_k(x) - h(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{implica} \qquad |h_k(x) - h(x)|^2 \longrightarrow 0$$

e

$$0 \le |h_k(x) - h(x)|^2 \le 4|h(x)|^2 \qquad \text{con } h \in L^2(\mathbb{R})$$

osservando che se $h \in L^2(\mathbb{R})$ allora $|h|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. ■

ESERCIZIO 14. *Assegnata la successione*

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} j2^{-j}\chi_{[0,1/j]}(x) \qquad x \in [0, 1]$$

e definita $f(x)$ *come il limite puntuale della successione, si usi il teorema di convergenza monotona per calcolare*

$$\int_{[0,1]} f(x)dx$$

DISCUSSIONE. Poiché le ipotesi del teorema di convergenza monotona sono facilmente verificate (tutti gli addendi sono funzioni non negative) possiamo scrivere che

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1]} f_k(x)dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{[0,1]} j2^{-j}\chi_{[0,1/j]}(x)dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{[0,1/j]} j2^{-j}dx = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} = 1$$

■

ESERCIZIO 15. *Posto*

$$X = L^2(\mathbb{R}) \qquad e \qquad Y = \left\{ f \text{ misurabile in } \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < +\infty \right\}$$

si mostri la correttezza delle seguenti affermazioni
i. $X \subseteq Y$ *e l'inclusione è stretta,*
ii. $f_n = \chi_{[n,n+1]} \not\longrightarrow 0$ *in* X,
iii. $f_n \longrightarrow 0$ *in* Y,
iv. se $g_n \longrightarrow 0$ *in* X *allora* $g_n \longrightarrow 0$ *in* Y.

DISCUSSIONE. i. Se $f \in X = L^2(\mathbb{R})$ allora f è misurabile sull'asse reale e vale che $|f(x)|^2 e^{-x^2} \le |f(x)|^2$ quasi ovunque, da cui segue

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

quindi abbiamo mostrato che $X \subseteq Y$. Per mostrare che l'inclusione è stretta è sufficiente esibire un elemento del secondo spazio che non appartiene al primo, quindi proviamo che la funzione costante $f_1(x) \equiv 1$ sta in $Y \setminus X$, infatti la funzione costante non può essere di quadrato sommabile su $\mathbb{R}$, avendo l'asse reale misura infinita, però vale che

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^2 e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

come mostrato a lezione.
ii. La successione f_n ha norma costante in X, infatti

$$\|f_n\|_X = \left[\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[n,n+1]}(x)|^2 dx\right]^{1/2} = \left[\int_n^{n+1} dx\right]^{1/2} = 1$$

e siccome tali norme non costituiscono una successione infinitesima di numeri reali la successione non tende a zero in X.
iii. La successione $\{f_n\}$ ha un comportamento differente in Y, infatti abbiamo che

$$\|f_n\|_Y = \left[\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[n,n+1]}(x)|^2 e^{-x^2} dx\right]^{1/2} = \left[\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx\right]^{1/2} \leq \left[e^{-n^2}\right]^{1/2} = e^{-n^2/2}$$

quindi $f_n \longrightarrow 0$ in Y.
iv. L'ultima affermazione segue da un'osservazione fatta nel primo quesito dell'esercizio, infatti vale che

$$0 \leq \|g_n\|_Y^2 = \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^2 e^{-x^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^2 dx = \|g_n\|_X^2 \longrightarrow 0$$

e l'affermazione segue per confronto. ■

Esercizio 16. *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}$$

si determini
i. l'insieme di convergenza E*,*
ii. il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*
iii. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie risulta derivabile.*

Discussione. La serie di potenze in oggetto è, in realtà, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{con} \qquad a_n = \begin{cases} 4^{1+n/2}/n^2 & \text{n pari} \\ 0 & \text{n dispari} \end{cases}$$

Il criterio di Hadamard ci permette di calcolare rapidamente il raggio di convergenza di questa serie di potenze

$$L = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[2k]{\frac{4^k}{k^2}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[2k]{\frac{2^{2k}}{k^2}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} 2\left[\frac{1}{k^2}\right]^{1/2k} = 2$$

Si noti che i coefficienti dispari realizzano la sottosuccessione dei coefficienti che tende al lim inf.
Il precedente limite implica che la serie converge assolutamente nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$, visto che $R = 1/L = 1/2$.
Se $x = \pm 1/2$ abbiamo che $x^2 = 1/4$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

essendo una serie armonica generalizzata assolutamente convergente. Quindi la serie converge totalmente (e quindi uniformemente, assolutamente e puntualmente) nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$, infatti osservando che

$$\|a_{2k}x^{2k}\|_\infty = \sup_{x\in[-1/2,1/2]} \left|\frac{4^k}{k^2}x^2\right| = \frac{4^k}{k^2} \max_{x\in[-1/2,1/2]} |x^{2k}| = \frac{4^k}{k^2}\left[\frac{1}{2}\right]^{2k} = \frac{1}{k^2}$$

possiamo concludere le convergenze elencate precedentemente.

Riguardo alla derivabilità della serie dobbiamo ricordare che abbiamo bisogno di un intervallo aperto per poter effettuare il limite del rapporto incrementale, per cui l'intervallo massimale di derivabilità è $(-1/2, 1/2)$ e vale che

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k^2} x^{2k} \qquad \text{da cui} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1}}{k} x^{2k-1} \qquad \text{per ogni } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

derivando termine a termine, grazie al torema di scambio tra derivazione e sommatoria (si osservi che, per $x = \pm 1/2$, la serie associata alla funzione derivata non converge puntualmente). ■

ESERCIZIO 17. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} x^{2k}$$

i. si determini l'insieme di convergenza $E \subseteq \mathbb{R}$,
ii. si determini il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*
iii. si calcoli esplicitamente, se possibile, la somma della serie.

DISCUSSIONE. i. & ii. Grazie alla sostituzione $x^2 = t$ possiamo ricondurci ad una serie di potenze "standard", ed osservare che, siccome vale

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{k+2}} = 1$$

nella variabile t la serie converge puntualmente nell'intervallo $(-1, 1)$ e totalmente in ogni intervallo $[a, b] \subseteq (-1, 1)$, e non è possibile avere convergenza in un intervallo più ampio, visto che la successione dei coefficienti della serie non è infinitesima. Traducendo il risultato nella variabile x abbiamo che la serie converge puntualmente nell'intervallo $(-1, 1)$ e totalmente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1, 1)$ (questo perché $\sqrt{1} = 1$!).

iii. Per il calcolo della somma procediamo usando i teoremi di scambio tra serie e integrazione o derivazione. Innanzitutto, grazie alla sostituzione $t = x^2$, abbiamo a che fare con una serie più semplice, che possiamo riscrivere come segue

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - \frac{2}{k+2}\right] t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} t^k = \frac{1}{1-t} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} t^k \qquad t \in [a, b] \subseteq (-1, 1)$$

dove abbiamo usato la convergenza totale e la somma (nota) della serie geometrica. Riguardo alla seconda serie abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} \frac{t^{k+2}}{t^2} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t s^{k+1} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{+\infty} s^{k+1}\right] ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{+\infty} s^j\right] ds$$
$$= \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{s}{1-s} dt = \frac{1}{t^2} [-t - \ln(1-t)]$$

da cui ricaviamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} t^k = \frac{1}{1-t} + 2 \left[\frac{t + \ln(1-t)}{t^2}\right]$$

Osserviamo che nei calcoli precedenti abbiamo moltiplicato e diviso per t^2, introducendo (solo apparentemente) un problema per $t = 0$, in realtà tutte le funzioni che compaiono nei calcoli devono essere pensate estese per continuità per $t = 0$, in modo da ottenere funzioni regolari. Ritornando alla variabile x otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} + 2 \left[\frac{x^2 + \ln(1-x^2)}{x^4}\right]$$

il che conclude l'esercizio. ■

ESERCIZIO 18. *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}$$

si determini
i. l'insieme di convergenza E*,*
ii. il sottoinsieme di E *in cui la serie converge totalmente,*
iii. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie risulta derivabile,*
iv. determinare il sottoinsieme di E *in cui la serie converge in* L^2*.*

DISCUSSIONE. La serie di potenze in oggetto è, in realtà, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{con} \qquad a_n = \begin{cases} 4^{1+n/2}/n^2 & \text{n pari} \\ 0 & \text{n dispari} \end{cases}$$

Il criterio di Hadamard ci permette di calcolare rapidamente il raggio di convergenza di questa serie di potenze

$$L = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[2k]{\frac{4^k}{k^2}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[2k]{\frac{2^{2k}}{k^2}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} 2\left[\frac{1}{k^2}\right]^{1/2k} = 2$$

Si noti che i coefficienti dispari realizzano la sottosuccessione dei coefficienti che tende al lim inf.
Il precedente limite implica che la serie converge assolutamente nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$, visto che $R = 1/L = 1/2$.
Se $x = \pm 1/2$ abbiamo che $x^2 = 1/4$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

essendo una serie armonica generalizzata assolutamente convergente. Quindi la serie converge totalmente (e quindi uniformemente, assolutamente e puntualmente) nell'intervallo $E = [-1/2, 1/2]$, infatti osservando che

$$\|a_{2k}x^{2k}\|_\infty = \sup_{x\in[-1/2,1/2]} \left|\frac{4^k}{k^2}x^2\right| = \frac{4^k}{k^2} \max_{x\in[-1/2,1/2]} |x^{2k}| = \frac{4^k}{k^2}\left[\frac{1}{2}\right]^{2k} = \frac{1}{k^2}$$

possiamo concludere le convergenze elencate precedentemente.
Riguardo alla derivabilità della serie dobbiamo ricordare che abbiamo bisogno di un intervallo aperto per poter effettuare il limite del rapporto incrementale, per cui l'intervallo massimale di derivabilità è $(-1/2, 1/2)$ e vale che

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k^2} x^{2k} \qquad \text{da cui} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1}}{k} x^{2k-1} \qquad \text{per ogni } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

derivando termine a termine, grazie al torema di scambio tra derivazione e sommatoria (si osservi che, per $x = \pm 1/2$, la serie associata alla funzione derivata non converge puntualmente).
iv. Sappiamo che la serie di funzioni converge puntualmente (quindi quasi ovunque) in E, per la discussione svolta in i, osservando che

$$|f_N(x)| := \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{N} \frac{4^k x^{2k}}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq C \in L^\infty(E) \qquad \text{q,o, } x \in E$$

la convergenza in $L^2(E)$ segue dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue. ■

ESERCIZIO 19. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2} x^{2k}$$

i. si determini l'insieme di convergenza $E \subseteq \mathbb{R}$*,*
ii. si determini il sottoinsieme di E *in cui la serie converge in* L^1*,*
iii. si calcoli esplicitamente, se possibile, la somma della serie.

DISCUSSIONE. i. Grazie alla sostituzione $x^2 = t$ possiamo ricondurci ad una serie di potenze "standard", ed osservare che, siccome vale

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\longrightarrow+\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{k+2}} = 1$$

nella variabile t la serie converge puntualmente nell'intervallo $(-1,1)$ e totalmente in ogni intervallo $[a,b]\subseteq(-1,1)$, e non è possibile avere convergenza in un intervallo più ampio, visto che la successione dei coefficienti della serie non è infinitesima. Traducendo il risultato nella variabile x abbiamo che la serie converge puntualmente nell'intervallo $E = (-1,1)$ e totalmente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1,1)$ (questo perché $\sqrt{1} = 1!$).

iii. Per il calcolo della somma procediamo usando i teoremi di scambio tra serie e integrazione o derivazione. Innanzitutto, grazie alla sostituzione $t = x^2$, abbiamo a che fare con una serie più semplice, che possiamo riscrivere come segue

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k+2}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[1-\frac{2}{k+2}\right]t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}t^k - 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+2}t^k = \frac{1}{1-t} - 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+2}t^k \qquad t\in[a,b]\subseteq(-1,1)$$

dove abbiamo usato la convergenza totale e la somma (nota) della serie geometrica. Riguardo alla seconda serie abbiamo che

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+2}t^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+2}\frac{t^{k+2}}{t^2} = \frac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^t s^{k+1}ds = \frac{1}{t^2}\int_0^t\left[\sum_{k=0}^{+\infty}s^{k+1}\right]ds = \frac{1}{t^2}\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{+\infty}s^j\right]ds \\ &= \frac{1}{t^2}\int_0^t\frac{s}{1-s}dt = \frac{1}{t^2}\left[-t-\ln(1-t)\right]\end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k+2}t^k = \frac{1}{1-t} + 2\left[\frac{t+\ln(1-t)}{t^2}\right]$$

Osserviamo che nei calcoli precedenti abbiamo moltiplicato e diviso per t^2, introducendo (solo apparentemente) un problema per $t = 0$, in realtà tutte le funzioni che compaiono nei calcoli devono essere pensate estese per continuità per $t = 0$, in modo da ottenere funzioni regolari. Ritornando alla variabile x otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k+2}x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} + 2\left[\frac{x^2+\ln(1-x^2)}{x^4}\right] = S(x)$$

il che conclude iii.

ii. Poiché la serie è a termini positivi e abbiamo gia mostrato che la successione delle troncate converge quasi ovunque alla funzione limite in $(-1,1)$, possiamo dire che abbiamo convergenza L^1 in ogni intervallo $I\subseteq E$ tale che $S\in L^1(I)$. Osservando che

$$S(x)\simeq\frac{1}{1-x^2} \qquad \text{per } x\longrightarrow\pm1$$

da cui abbiamo che $S\notin L^1(E)$, possiamo concludere che I può essere un qualsiasi intervallo strettamente contenuto in $(-1,1)$. ∎

ESERCIZIO 20. *Data la seguente serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}[f(x)]^{2(k+1)}$$

se ne calcoli la somma, spiegando dove converge puntualmente ed uniformemente.

Discussione. Ignorando, per il momento, il problema della convergenza della serie di funzioni, procediamo in maniera formale e, grazie alla sostituzione $z = f(x)$, svolgiamo i seguenti calcoli

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} t^{2k+2} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot (-1)^k \frac{t^{2k+2}}{2(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot (-1)^k \int_0^t s^{2k+1} ds = \int_0^t 2 \left[s \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k s^{2k} \right] ds$$
$$= \int_0^t \frac{2s}{1+s^2} ds = \ln\left(1+t^2\right)$$

Non sarà sfuggito ad alcun studente/ssa che il passaggio chiave dei precedenti calcoli è la convergenza della serie geometrica, quindi tutti i calcoli sono corretti per $t \in [a,b] \subseteq (-1,1)$. In conclusione, tornando alla variabile x, possiamo affermare che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} [f(x)]^{2(k+1)} = \ln\left(1+f^2(x)\right)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq \delta < 1$. ■

Esercizio 21. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

i. si determini l'insieme di convergenza puntuale,
ii. si determini l'insieme di convergenza uniforme,
iii. si determini l'insieme di convergenza L^2*,*
iv. si scriva la funzione somma (dove esiste).

Discussione. Cominciamo l'esercizio con una osservazione, che si rivelerà cruciale, ponendo $e^{-x^2} = w$ la serie di funzioni si trasforma nella seguente serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \qquad w \in \mathbb{R}$$

della quale sappiamo vita, morte e miracoli... in particolare abbiamo che la serie
a. converge puntualmente ed assolutamente per $w \in (-1,1)$,
b. converge uniformemente e totalmente in ogni intervallo $[a,b] \subseteq (-1,1)$,
c. non converge per $w \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.
Allora possiamo subito concludere che
i. la serie di funzioni iniziale converge puntualmente ed assolutamente quando $e^{-x^2} \in (-1,1)$, cioè per $x \neq 0$, ricordando le proporietà della funzione esponenziale.
ii. la serie di funzioni iniziale converge totalmente, e quindi uniformemente, quando $e^{-x^2} \in [a,b] \subseteq (-1,1)$ per ogni a,b fissati. Cioè per $x \in (-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$ con il parametro $\delta > 0$ fissato.
iv. Il calcolo della somma discende, nuovamente, dalle proprietà della serie geometrica, infatti vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-e^{-x^2}} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1} = S(x) \qquad \text{per } x \neq 0$$

naturalmente abbiamo usato nuovamente la sostituzione $w = e^{-x^2}$.
iii. Poiché la serie di funzioni è una serie a termini positivi che converge puntualmente alla funzione S (per $x \neq 0$), dal teorema della convergenza monotona di Levi possiamo dire che abbiamo convergenza in $L^2(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $s \in L^2(E)$, quindi per ogni insieme E per il quale esista $\delta > 0$ tale che $E \subseteq (-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$. ■

Esercizio 22. *Si risolva tramite lo sviluppo in serie di potenze la seguente equazione differenziale*

$$u'(t) - u(t) = e^t$$

DISCUSSIONE. Cercare le soluzioni di un'equazione differenziale in forma di serie di potenze, significa supporre (o sapere a priori) che la soluzione sia una funzione analitica in un intervallo non degenere. Poi, ricordando che tale serie è derivabile termine a termine, otteniamo

$$u(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k \qquad \text{da cui} \qquad u'(t) = \sum_{k\geq 1} k a_k t^{k-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1}t^n$$

e sostituendo queste espressioni nell'equazione differenziale cerchiamo di tradurre l'equazione differenziale in un sistema algebrico di infinite equazioni aventi i coefficienti a_k come incognite. Ricordando lo svilupo in serie della funzione esponenziale l'equazione differenziale che ci interessa risolvere si riscrive nel seguente modo

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n - \sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}t^n$$

da cui ricaviamo

$$\sum_{n\geq 0}\left[(n+1)a_{n+1} - a_n - \frac{1}{n!}\right]t^n = 0$$

che si traduce nella legge per ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[a_n + \frac{1}{n!}\right] = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{con} \qquad a_0 = c \in \mathbb{R}$$

Provando a calcolare i primi elementi della successione dei coefficienti otteniamo

$$a_0 = c \qquad a_1 = c+1 \qquad a_2 = \frac{c+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{c}{2} + 1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{c}{2} + 1\right] + \frac{1}{6} = \frac{c}{6} + \frac{1}{2} \qquad a_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{c}{6} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{24} = \frac{c}{24} + \frac{1}{6}$$

questi coefficienti suggeriscono la seguente espressione

$$a_{n+1} = \frac{c}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}$$

che andiamo a provare per induzione. Abbiamo già verificato che la formula proposta è effettivamente verificata per alcuni valori dell'indice, cioè per $n = 1, 2, 3, 4$, per cui dobbiamo provare il passo induttivo, cioè che vale l'implicazione

$$\text{da} \quad a_n = \frac{c}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{segue} \quad a_{n+1} = \frac{c}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}$$

infatti possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{c}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right] + \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{c}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)}\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right] = \frac{c}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n+1}{n!} = \frac{c}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

La formula provata ci permette di ottenere un'espressione per la serie di potenze della soluzione della nostra equazione differenziale

$$u(t = c + \sum_{k\geq 1}\left[\frac{c}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}\right]t^k = c\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}t^k + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}t^k = c\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}t^k + t\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}t^n = ce^t + te^t \qquad c \in \mathbb{R}$$

Si noti che non abbiamo alcuna informazione sul valore della funzione incognita u in un punto, per cui abbiamo ottenuto infinite funzioni (tutte soluzioni dell'equazione differenziale) parametrizzate da un parametro reale.

■

ESERCIZIO 23. *Si ricavi lo spazio vettoriale delle soluzioni della seguente equazione differenziale*

$$u''(t) - 2tu'(t) = 0$$

Discussione. Innanzitutto osserviamo che possiamo considerare momentaneamente la seguente equazione differenziale

$$w'(t) - 2tw(t) = 0$$

dove stiamo interessandoci alla funzione incognita $w(t) = u'(t)$ in modo da ridurre l'ordine dell'equazione. Supponiamo che le soluzioni dell'equazione differenziale siano funzioni analitiche e, quindi, sviluppabili in serie di potenze intorno al punto $t_0 = 0$, questo ci permette di scrivere che

$$w(t) = \sum_{k\geq 0} w_k t^k \qquad \text{e} \qquad w'(t) = \sum_{k\geq 1} kw_k t^{k-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)w_{k+1}t^k \qquad \text{per ogni } t \in (-R, R)$$

e sostituendo nell'equazione differenziale (del primo ordine) otteniamo la relazione

$$\begin{aligned} w'(t) - 2tw'(t) &= \sum_{k\geq 1} kw_k t^{k-1} - 2t\sum_{k\geq 0} w_k t^k = \sum_{j\geq -1}(j+2)w_{j+2}t^{j+1} - \sum_{k\geq 0} 2w_k t^{k+1} \\ &= w_1 + \sum_{k\geq 0}\left[(k+2)w_{k+2} - 2w_k\right]t^{k+1} = 0 \end{aligned}$$

E poiché una serie di potenze è la serie relativa alla funzione identicamente nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, otteniamo le seguenti relazioni

$$w_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad w_{k+2} = \frac{2}{(k+2)}w_k$$

La formula per ricorrenza fa dipendere il valore del coefficiente w_{k+2} dal coefficiente w_k, e siccome $w_1 = 0$ per induzione abbiamo che

$$0 = w_1 = w_3 = \ldots = w_{2k+1} = \ldots \qquad \text{per ogni } k \geq 1$$

mentre per i coefficienti con indice pari, sempre procedendo per induzione, otteniamo

$$w_2 = \frac{2}{2}w_0 = w_0 \qquad w_4 = \frac{2}{4}w_2 = \frac{1}{2}w_0 \qquad w_6 = \frac{2}{6}w_4 = \frac{1}{6}w_0 \quad \ldots \quad w_{2k} = \frac{1}{k!}w_0$$

In generale abbiamo ottenuto che

$$w_0 \in \mathbb{R} \qquad w_{2k+1} = 0 \qquad w_{2k} = \frac{1}{k!}w_0 \qquad \text{per ogni } k$$

cioè

$$w(t) = \sum_{k\geq 0} w_k t^k = \sum_{j\geq 0}\frac{w_0}{j!}t^{2j} = w_0 e^{t^2} \qquad w_0 \in \mathbb{R}$$

Si noti che abbiamo ottenuto uno spazio vettoriale di dimensione 1, come spazio delle soluzioni, visto che tutte le soluzioni costituiscono una retta generata dai multipli dalla funzione e^{t^2}. Ritornando all'equazione differenziale originaria abbiamo ottenuto che

$$u'(t) = w(t) = w_0 e^{t^2} = \sum_{j\geq 0}\frac{w_0}{j!}t^{2j}$$

da cui ricaviamo, ricordando anche che $w(0) = u'(0) = u_1$, usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il teorema di scambio tra serie ed integrale, le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} u(t) - u(0) = u(t) - u_0 &= \int_0^t u'(s)ds = w_0\int_0^t e^{s^2}ds = w_0\sum_{j\geq 0}\int_0^t \frac{s^{2j}}{j!}ds \\ &= w_0\sum_{j\geq 0}\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)j!} = u_1\sum_{j\geq 0}\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)j!} = u_1 E(t) \end{aligned}$$

In conclusione possiamo descrivere lo spazio vettoriale, di dimensione 2, delle soluzioni dell'equazione differenziale iniziale nel seguente modo

$$u(t) = u_0 + u_1\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)k!}t^{2k+1} = u_0 + u_1 E(t) \qquad \text{con } u_0, u_1 \in \mathbb{R}$$

che è equivalente a dire che una base dello spazio vettoriale è costituito dalle funzioni 1 ed E(t). Naturalmente è possibile discutere direttamente l'equazione del secondo ordine, ottenendo una rappresentazione dello stesso spazio vettoriale. ■