Radici n-esime complesse

Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Si dicono **radici n-esime complesse** di z tutti i numeri $w \in \mathbb{C}$ t.c. $w^n = z$.

Quante sono? Come si calcolano?

Dobbiamo risolvere (in w) l'eq^{ne}

$$w^n = z.$$

Se $z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.
se $w = |w| e^{i\theta} = |w| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, l'eq^{ne} diventa.

$$w^n = |w|^n e^{in\theta} = |z| e^{i\varphi} \qquad (*)$$

- Se $z = 0$, deve essere necessariamente $w = 0$.
- Se $z \neq 0$, segue dalla $(*)$ che

1) $|w|^n = |z| \implies |w| = \sqrt[n]{|z|}$ inteso nel senso usuale di radice n-esima (positiva) di un numero positivo

2) $e^{in\theta} = e^{i\varphi} \implies n\theta = \varphi + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$$\implies \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

$k = 0 \implies \theta_0 = \frac{\varphi}{n} \implies w_0 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_0}$

$k = 1 \implies \theta_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \implies w_1 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_1}$

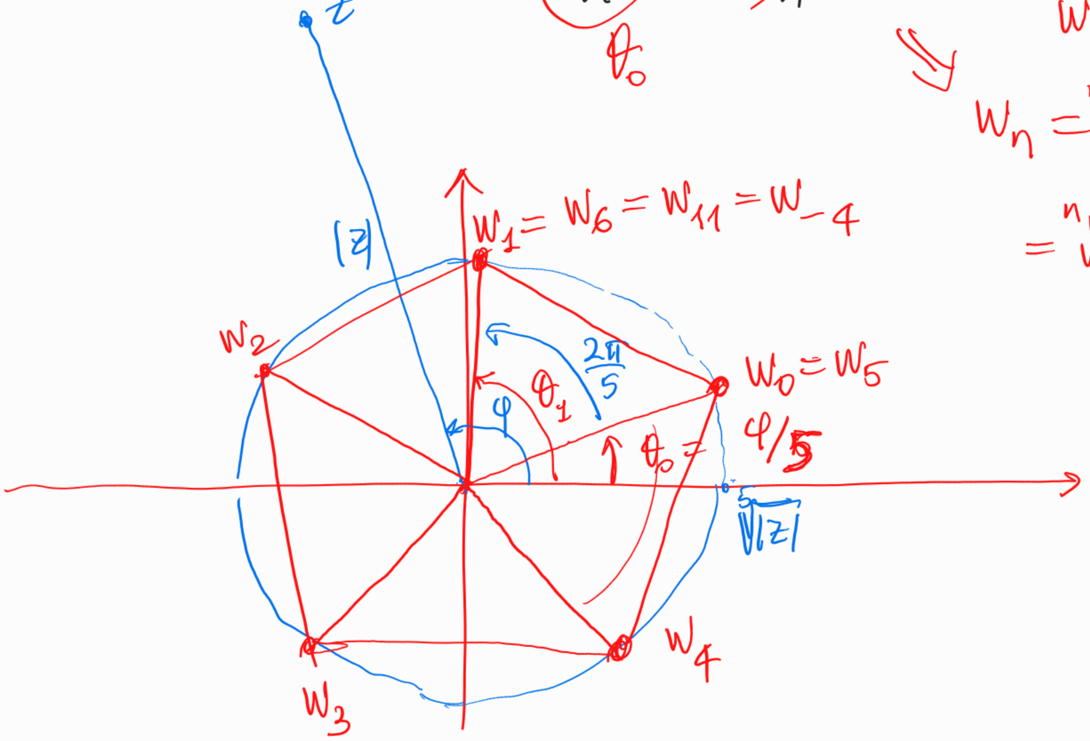
$k = 2 \implies \theta_2 = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n} \implies w_2 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_2}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$$k = n-1 \implies \theta_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n} \rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_{n-1}}$$

$$k = n \implies \theta_n = \underbrace{\frac{\varphi}{n}}_{\theta_0} + \frac{2\pi \cancel{n}}{\cancel{n}} \implies \text{ottengo lo stesso } w \text{ che per } k=0$$

$$w_n = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\theta_0 + 2\pi)} = w_0$$



$n = 5$

$|w| = \sqrt[5]{|z|}$

Teorema

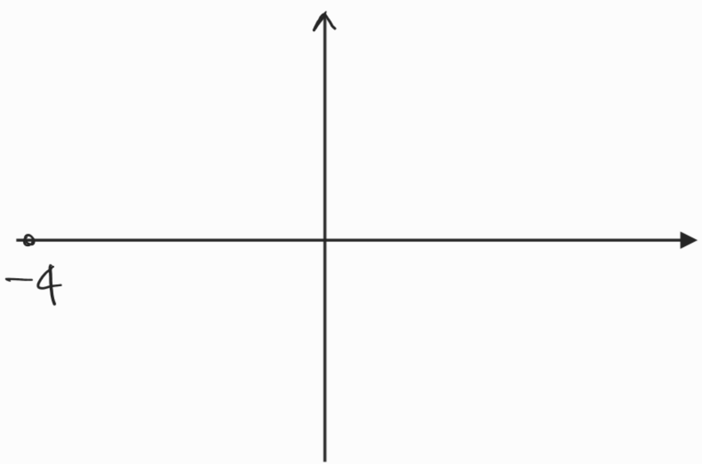
1) se $z = 0$, c'è una sola radice n-esima di z, $w = 0$.

2) se $z \neq 0$, ci sono n radici n-esime di z, e sono

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_k}, \quad \text{dove } \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Tali radici sono poste ai vertici di un poligono regolare di n lati centrato nell'origine

ESEMPIO Trovare le radici quarte di -4.



$$-4 = 4e^{i\pi}$$

Le radici quarte di -4 sono.

$$w_k = \sqrt[4]{4}\, e^{i\theta_k} = \sqrt{2}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

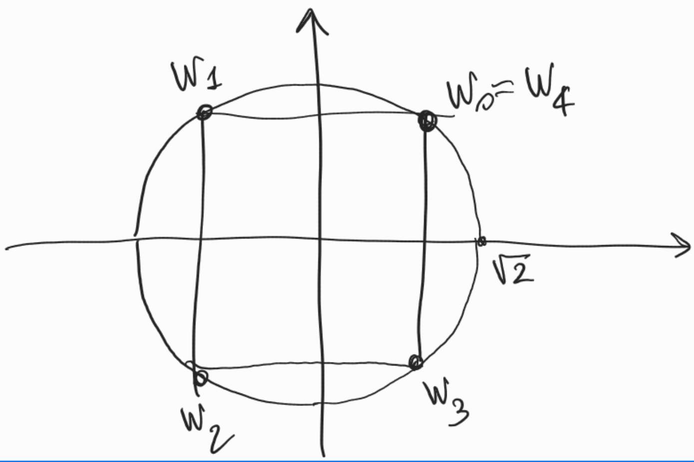
$k = 0, 1, 2, 3$

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i = -w_0 = \overline{w_1}$$

$$w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1 - i = -w_1 = \overline{w_0}$$



Radici quarte di 4

$$4 = 4e^{i0}$$

$$w_k = \sqrt[4]{4}\, e^{i\theta_k} = \sqrt{2}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{0 + 2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$$

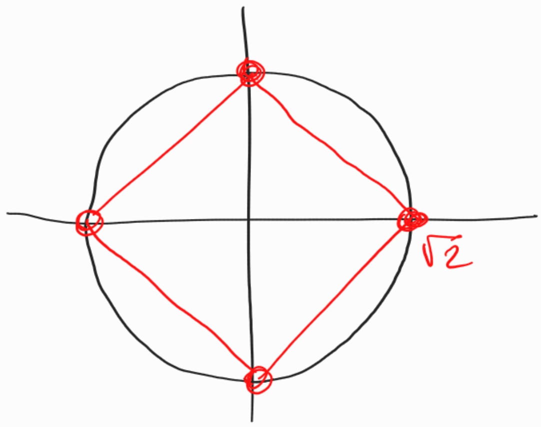
$k = 0, 1, 2, 3$

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i0} = \sqrt{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/2} = \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi} = -\sqrt{2}$$

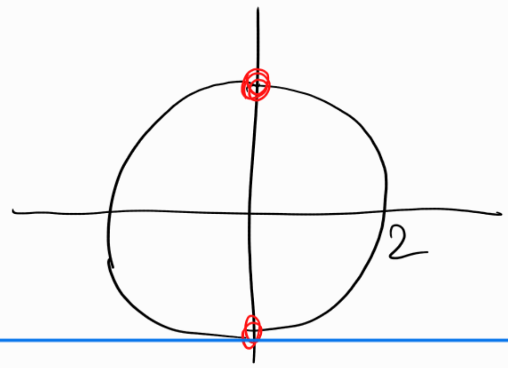
$$w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{2}\, i$$



Radici quadrate di -4. $\qquad -4 = 4e^{i\pi}$

$$W_k = \sqrt{4}\, e^{i\theta_k} = 2e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \qquad k = 0,1$$

$$W_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$
$$W_1 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$$

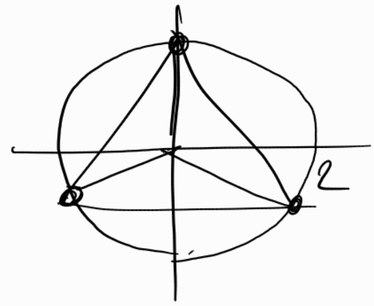


Calcolare le radici cubiche di $-8i$.

$$-8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i\theta_k} = 2e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$$

$k = 0,1,2$.



$$W_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$W_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$W_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$$

Esercizio

Risolvere l'eq^{ne} $\qquad |z|^3 z^3 = 64i$

a) in coordinate cartesiane $\quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$$(x^2+y^2)^{3/2}(x+iy)^3 = 64i.$$ (si risolve ma non è conveniente)

b) in coordinate polari $\qquad z = |z| e^{i\varphi}$

$$\underbrace{|z|^3}_{} \quad \underbrace{z^3}_{|z|^3 e^{i3\varphi}} = \underbrace{64\, i}_{64\, e^{i\pi/2}}$$

$$|z|^6 e^{i3\varphi} = 64\, e^{i\pi/2}$$

$$|z|^6 = 64 \iff |z| = 2$$

$$3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \cancel{(k \in \mathbb{Z})}$$

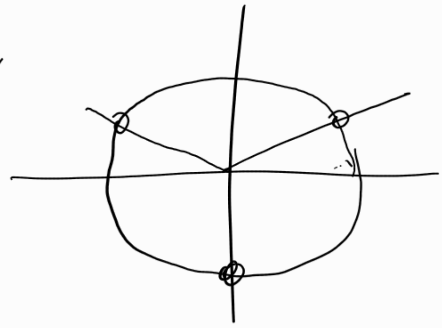
$k = 0, 1, 2$

Tre soluz.

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$



Per risolvere un'eqne nei complessi, quali coordinate usare?

In linea di massima:

- Coordinate cartesiane se ci sono prevalentemente somme/differenze

  es. $\qquad z + \bar{z} - 3\,\mathrm{Im}\, z = z^2 + |z|$

- coordinate polari se ci sono prevalentemente potenze ..

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un polinomio $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k ,$$

dove $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, ammette sempre una radice complessa, cioè un numero $z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $P_n(z_1) = 0$.

Ne segue che $P_n(z)$ ammette n radici complesse $z_1, z_2, \ldots z_n$ t.c.

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \qquad (*)$$

Tali radici possono anche coincidere tra loro: il teorema si può riscrivere così:

"Un polinomio di grado n ammette sempre n radici complesse, contate con la loro molteplicità"

La radice z_1 ha molteplicità k $\quad 1 \leq k \leq n$

se esattamente k delle radici $z_1, \ldots z_n$ in $(*)$ coincidono con z_1.

OSS Il risultato è falso nei reali.

Il polinomio $P_2(x) = x^2 + 1$ non ammette radici reali

Ma se lo considero nei complessi, cioè $P_2(z) = z^2 + 1$, esso ammette le radici $\pm i$, e quindi si scompone come

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

Risolvere l'eq^{ne} $z^6+2z^3+2=0$

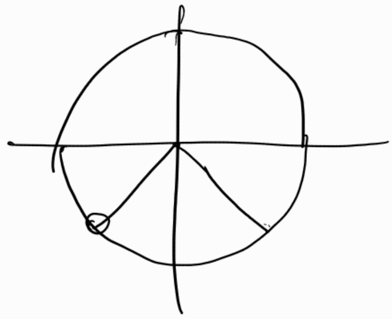
Poniamo $z^3=w \rightarrow w^2+2w+2=0$

applico la consueta formula (che vale nei complessi)

$$z^3=w=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i$$

entrambe le radici complesse di -1.

1) $z^3=-1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3}{4}\pi}$



$|z|=\sqrt[6]{2}$

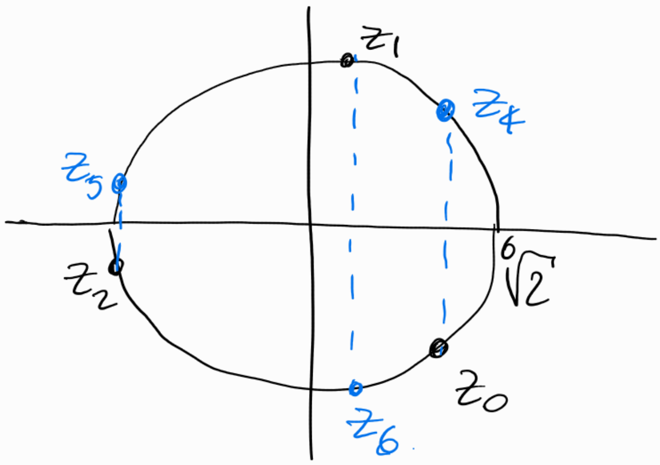
$z=\sqrt[6]{2}\,e^{i\theta_k}$

$$\theta_k=\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3} \qquad k=0,1,2$$

$$z_0=\sqrt[6]{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1-i)$$

$$z_1=\sqrt[6]{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right)}=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{5}{12}\pi}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{13}{12}\pi}$$



$z^3=-1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$$z_4=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$$

$$z_5=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{11}{12}\pi}$$

$$z_6=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

Conseguenze del Teor. Fond dell'Algebra sui polinomi reali

Sia $P_n(x)$ un polinomio a coeff^ti reali.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R} \qquad a_n \neq 0. \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Voglio fare la scomposizione di $P_n(x)$ nei reali.

Complessifico il problema:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Per il teor. fond., $\exists\, z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$ t.c

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

dove $z_1, \dots z_n$ annullano il polinomio: $P_n(z_k) = 0$.

LEMMA Poiché i coeff^ti sono reali,
se $z_1 = x_1 + iy_1$ è radice di $P_n(z)$, anche $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ lo è.
Cioè: un polinomio a coeff^ti reali ammette o radici reali oppure coppie di complessi coniugati.

DIM

$$P_n(z_1) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} P_n(\overline{z_1}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{P_n(z_1)} = \overline{0} = 0$$

$$\parallel$$

$$\overline{\left(a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \dots a_1 z + a_0\right)} =$$

$$= \underbrace{\overline{a_n}}_{=a_n} (\overline{z_1})^n + \underbrace{\overline{a_{n-1}}}_{=a_{n-1}} (\overline{z_1})^{n-1} + \dots + \underbrace{\overline{a_1}}_{=a_1}\, \overline{z_1} + \underbrace{\overline{a_0}}_{=a_0} = P_n(\overline{z_1}) \qquad \square$$

perché sono reali

Supponiamo che z_1 e $\overline{z_1}$ siano due radici di P_n.

$$P_n(z) = a_n \underbrace{(z-z_1)(z-\overline{z_1})}_{\text{polinomio di 2° grado a coeff.ti reali}} (z - \ldots) \ldots (\quad)$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \Rightarrow \overline{z_1} = x_1 - iy_1$$

$$(z-z_1)(z-\overline{z_1}) = ((z-x_1)-iy_1)((z-x_1)+iy_1) = \underline{(z-x_1)^2 + y_1^2} =$$
$$= z^2 - 2zx_1 + x_1^2 + y_1^2$$

Ripassando ai reali, otteniamo che $P_n(x)$ si scompone in prodotto di polinomi di 1° grado $x - x_1$, corrispondenti alle radici reali, e polinomi di 2° grado irriducibili (nei reali) $x^2 + ax + b$ con il Δ negativo.

$$P_n(x) = a_n (x-x_1)\ldots(x-x_h)\underbrace{(x^2+b_1x+c_1)\ldots(x^2+b_kx+c_k)}_{\text{irriducibili}}$$

con $h + 2k = n$

Scomporre (nei reali) $P_4(x) = x^4 + 16$

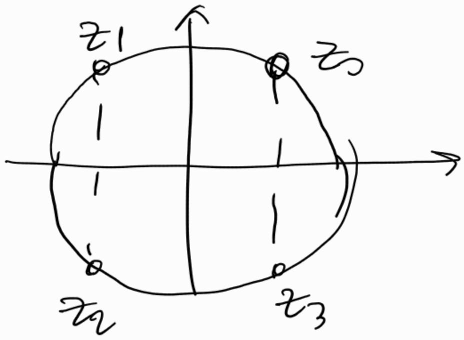
1° modo (già fatto)

$$\boxed{x^4+16} = (x^4+16+8x^2) - (8x^2) = (x^2+4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2+4-2\sqrt{2}x)(x^2+4+2\sqrt{2}x)$$

2° modo Trovare gli zeri di x^4+16 equivale a trovare le radici quarte di -16. $\to$ (esercizio)

$z_0 = \sqrt{2}(1+i)$, $z_1 = \sqrt{2}(-1+i)$, $z_2 = \sqrt{2}(-1-i)$

$z_3 = \sqrt{2}(1-i)$


z1
z0
z2
z3