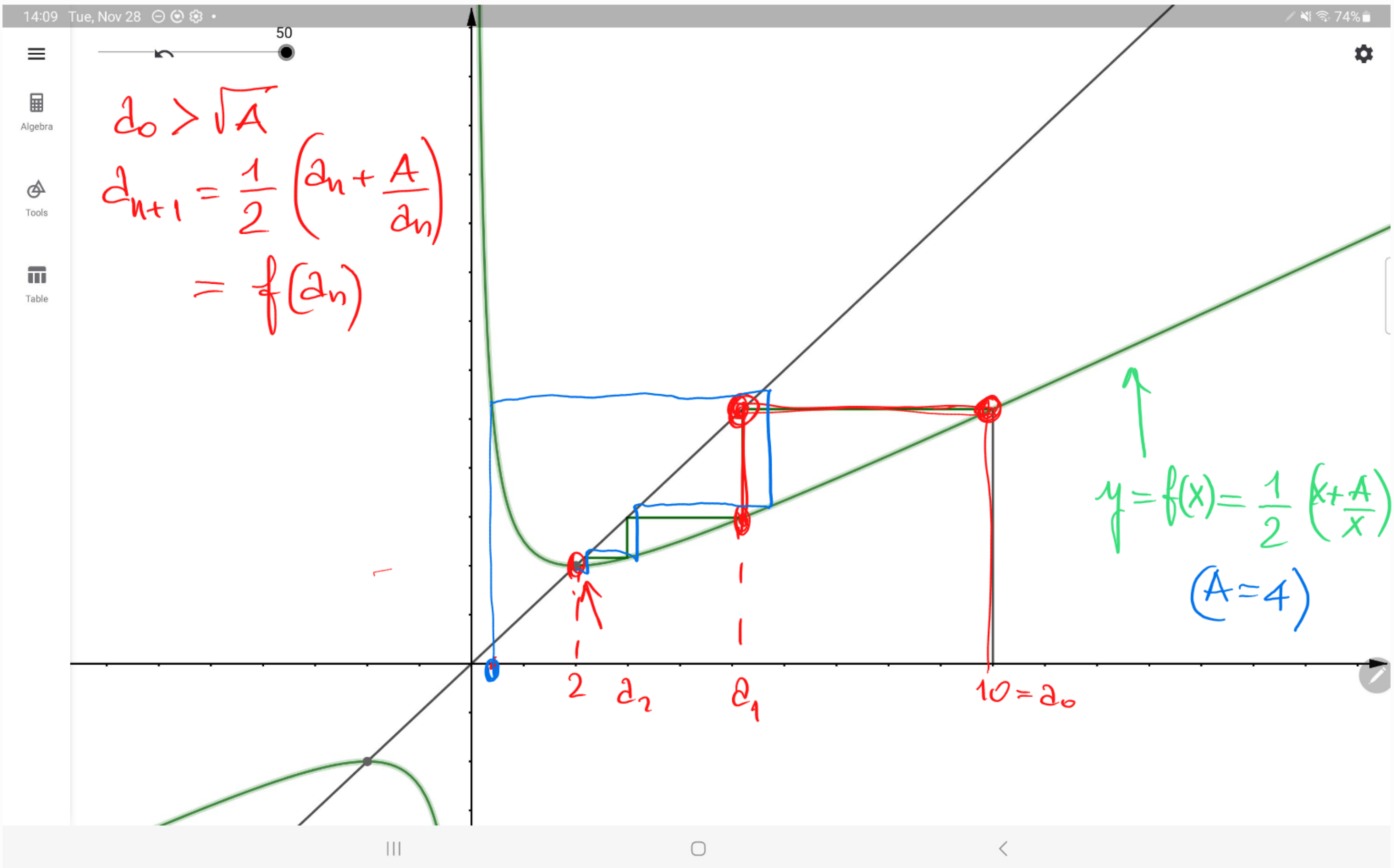
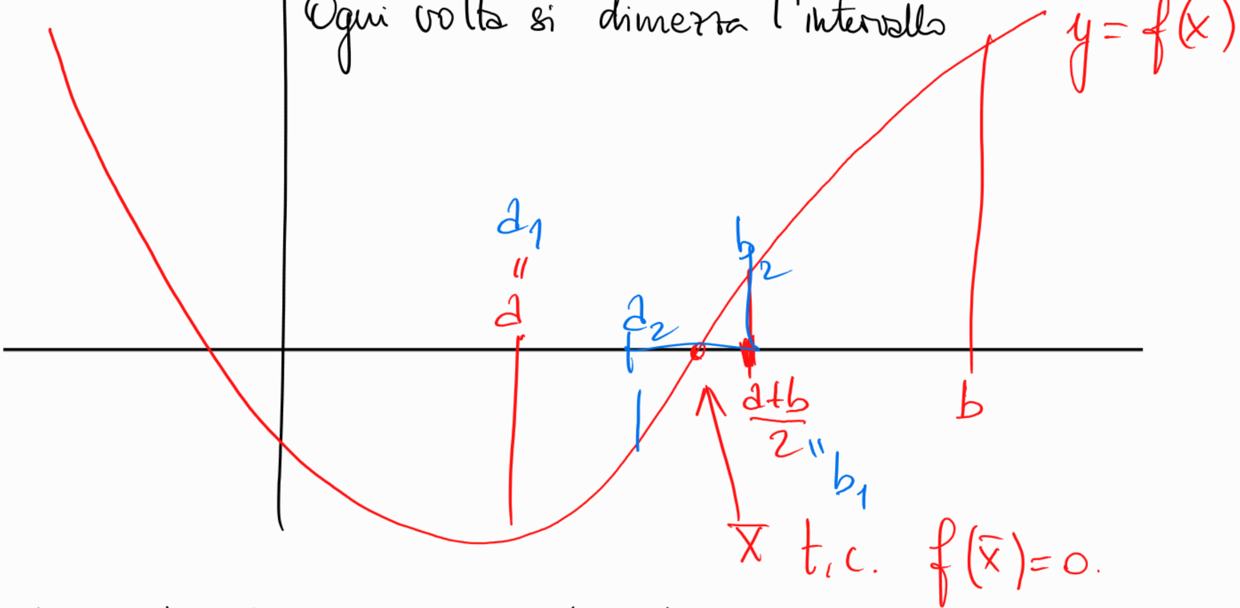


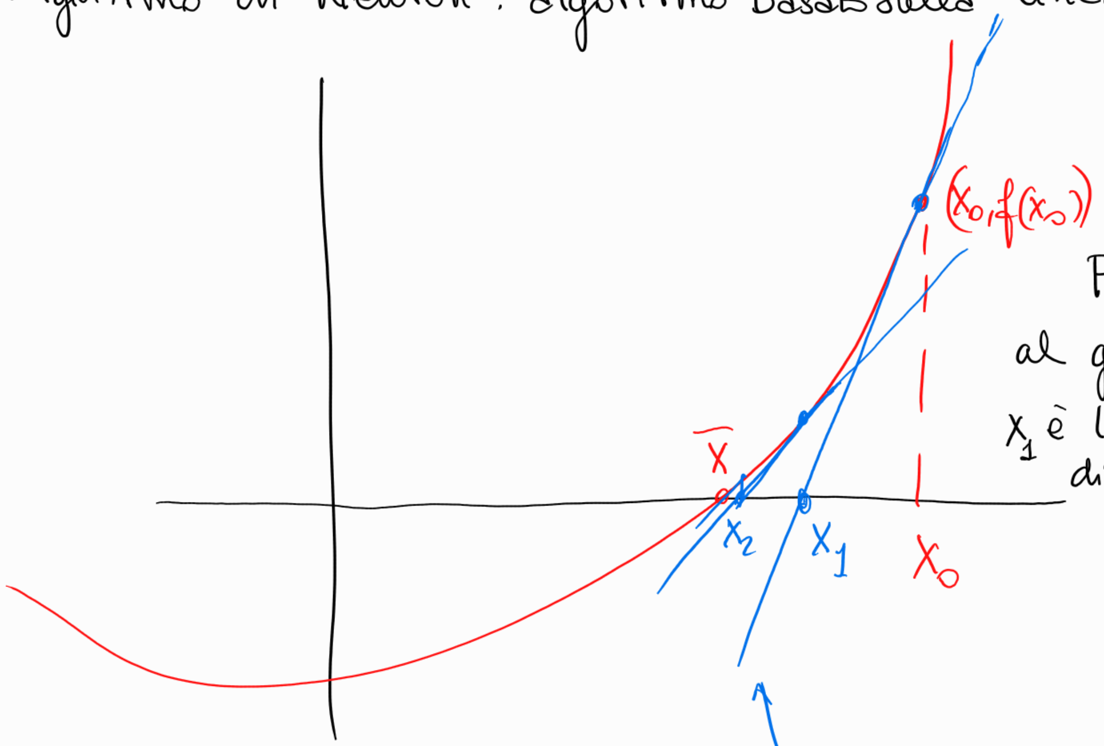
Illustrazione dell'algoritmo di Erone.

Algoritmi per approssimare gli zeri di funzioni.

Algoritmo basato sul teorema di esistenza degli zeri
Ogni volta si dimezza l'intervallo



Algoritmo di Newton: algoritmo basato sulla linearizzazione di f.



Prendo la retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$
x_1 è l'ascissa dell'intersez. di tale retta con l'asse x.

$$0 = \boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Metodo di Newton. (iterativo)

$$\begin{cases} x_0 & \text{assegnato (possibilmente non troppo lontano dallo zero cercato della funzione)} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Vale il seguente teorema:

TEOREMA (convergenza del metodo di Newton).

Siano I un intervallo chiuso $[a,b]$, $f \in C^2(I)$ (cioè derivabile due volte con derivata seconda continua)

Supponiamo che $f'(x) \neq 0$ in I, e sia $\bar{x} \in I$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.

Allora $\exists\ \bar{\varepsilon} > 0$ t.c. se $x_0 \in [\bar{x} - \bar{\varepsilon}, \bar{x} + \bar{\varepsilon}]$, allora:

1) La successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton converge a $\bar{x}$.

2) L'errore $\varepsilon_n = |x_n - \bar{x}|$ verifica

$$\varepsilon_{n+1} < c\ \varepsilon_n^2$$

(convergenza rapidissima).

Usiamo il metodo di Newton per trovare la $\sqrt{A}$ $A > 0$.

$$f(x) = x^2 - A \qquad f'(x) = 2x$$

x_0 assegnato

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n^2 - A)}{2x_n} =$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

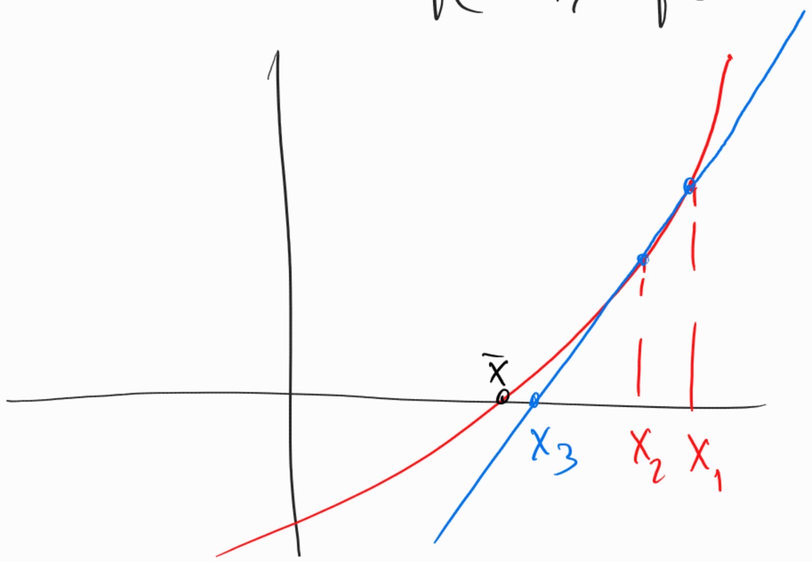
L'algoritmo di Newton coincide con l'algoritmo di Erone!

OSS A volte non è possibile calcolare la derivata di f.
e quindi si approssima con un rapporto incrementale.

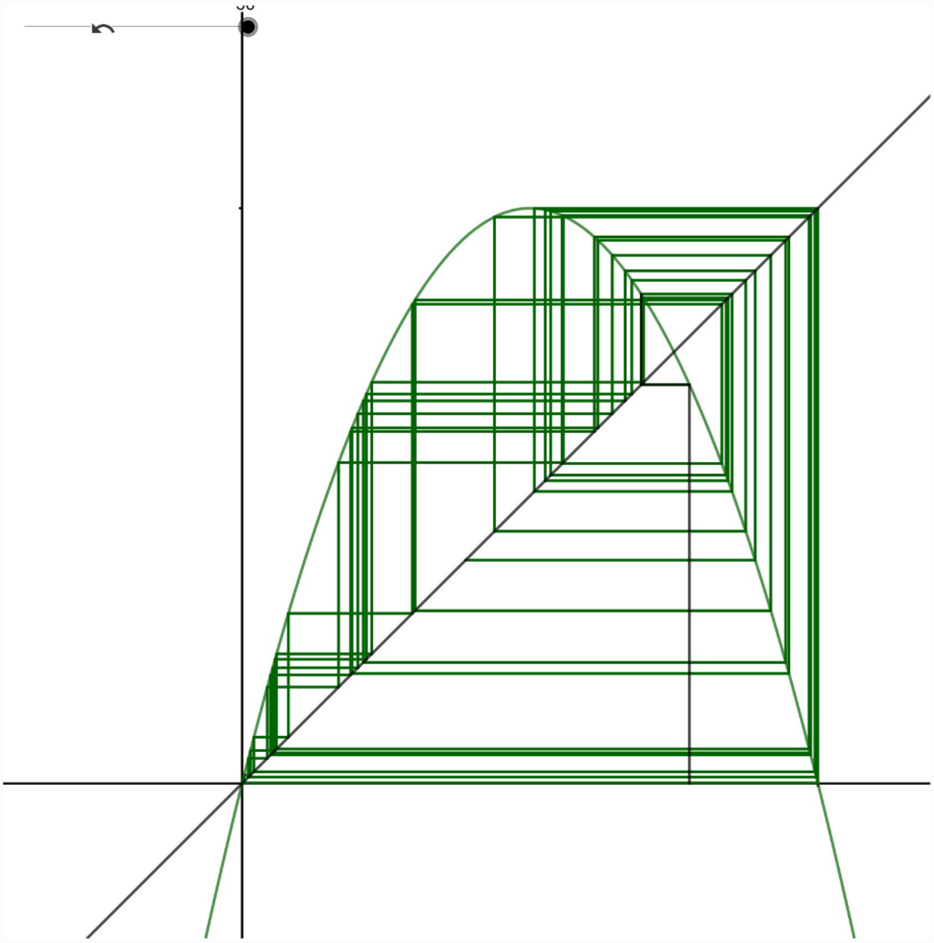
x_0, x_1 assegnati

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{\left(\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}\right)} = \underset{\text{calcoli}}{---}$$

$$= \frac{f(x_{n+1})\, x_n - f(x_n)\, x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$



Questo nuovo metodo si chiama "metodo della secante" e converge a $\bar{x}$ sotto opportune ipotesi, ma un po' più lentamente.



Attenzione, però: schemi iterativi del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ possono in generale dare origine a "sistemi caotici", in cui a piccole variazioni del dato iniziale corrispondono comportamenti molto diversi della successione.

Nella figura: il comportamento di una successione regolata dalla legge

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4\,x_n\,(1-x_n)$$