Trovare l'ordine di infinitesimo, per $n \to +\infty$, di

$$\frac{5}{\sqrt{n}} - \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)}_{\sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$$

se $\alpha \neq 5$, si mette in evidenza $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{5}{\sqrt{n}} - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{\left(5 - \underbrace{\frac{\text{sen}\left(\alpha/\sqrt{n}\right)}{1/\sqrt{n}}}_{\to \alpha}\right)}_{\to 5-\alpha} \sim \frac{5-\alpha}{\sqrt{n}}$$

infinitesimo di ordine 1/2.

Se $\alpha = 5$ si usa Taylor $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ per $t \to 0$

posso mettere $\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \to 0$ al posto di t.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha^3}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n \to +\infty$$

$$\frac{5}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \frac{5}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha^3}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

se $\alpha \neq 5$ questo è asint. equivalente a $\frac{5-\alpha}{\sqrt{n}}$

se $\alpha = 5$, riscrivo

$$\cancel{\frac{5}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{5}{\sqrt{n}}} + \frac{125}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{125}{6n^{3/2}}$$

infinitesimo di ordine 3/2.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x)}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

(provare a risolvere con L'Hopital)

$$\log(\cos x) =$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad x \to 0$$

$$= \log\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{\substack{\shortparallel \\ t\to 0}}\Big) = \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ per } t\to 0$$

$$= \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underbrace{o(x^5)}_{\substack{\shortparallel \\ o(x^4)}}\Big) - \frac{1}{2}\underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{x^4}{4} + o(x^4)}} + \underbrace{o\Big(\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2\Big)}_{\substack{\shortparallel \\ o(x^4)}}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^4}{8} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x)}{x^4} = \frac{\cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -1/12$$

$$\log(\cos x) = \log\big(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{t\to}\big) = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \underbrace{o\big((\cos x - 1)^2\big)}_{\substack{\shortparallel \\ o(x^4)}}$$

e poi si sostituisce

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

Applicazioni del polinomio di Taylor

Se x_0 è un pto critico di f $(f'(x_0)=0)$.

Allora x_0 può essere:

1) un pto di minimo relativo (per es. $x_0=0$ per $f(x)=x^2$)
2) " " " massimo " (per es. $x_0=0$ per $f(x)=-x^2$)
3) un pto non di estremo relativo (per es. $x_0=0$ per $f(x)=x^3$)

Come si capisce in quale caso ci troviamo?

Possiamo studiare il segno di f' vicino a x_0.

$$\underset{x_0}{\overset{f'<0 \;\; , \;\; f'>0}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}} \Longrightarrow x_0 \text{ è pto di minimo relativo.}$$

Un altro modo è calcolare le derivate successive in x_0.

TEOREMA Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.
Sia $n\geq 2$, sia f derivabile n volte in x_0, con

$$f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0. \text{ Allora:}$$

1) se n è pari $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{se } f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ è pto di min. locale stretto per } f \\ \text{se } f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ è pto di max. locale stretto per } f. \end{cases}$

2) se n è dispari $\Rightarrow$ x_0 non è punto di estremo locale per f.

<u>Dim</u> Scrivo lo sviluppo di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n con il resto di Peano.

$$f(x)=f(x_0)+\cancel{f'(x_0)(x-x_0)}+\cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}+\cancel{\dots}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o\left((x-x_0)^n\right)$$

<u>per $x\to x_0$</u>

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$
$$=(x-x_0)^n\left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\substack{\vee\\ 0}}+o(1)\right]$$

1a) se <u>n pari</u>, $f^{(n)}(x_0)>0$.
la parentesi quadra è definitivamente positiva per $x\to x_0$
$(x-x_0)^n>0 \quad \forall x\neq x_0$
$\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$ def^{te} per $x\to x_0$
$\Rightarrow x_0$ pto di min. locale stretto.

1b) <u>n pari</u> $f^{(n)}(x_0)<0$
$[---]<0$ def^{te} per $x\to x_0$

$(x-x_0)^n > 0 \quad \forall x \neq x_0$

$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0) < 0$ def^{te} per $x \to x_0$

$\Rightarrow \quad x_0$ pto di max. locale stretto per f.

2) se n dispari, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{cambia segno attraversando } x_0} \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right]}_{\text{ha il segno di } f^{(n)}(x_0) \text{ def}^{te} \text{ per } x \to x_0} \qquad \text{per } x \to x_0$$

$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0

$\Rightarrow$ il pto non è né di max né di minimo.

In realtà si può provare che è di flesso.

Scrivo lo sviluppo di Taylor di $f''(x)$ centrato in x_0

$$f''(x) = \underbrace{\cancel{f''(x_0)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{f'''(x_0)}}_{}\cancel{(x-x_0)} + \cancel{\dots} + \frac{\overset{=(f'')^{(n-2)}(x_0)}{\boxed{f^{(n)}(x_0)}}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o\left((x-x_0)^{n-2}\right)$$

$$(x_0) \overset{\text{||}}{} \; 0 \qquad f'''(x_0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o\left((x-x_0)^{n-2}\right) = \qquad x \to x_0$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^{n-2}}_{\text{cambia segno attraversando } x_0.} \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o(1)\right]}_{\text{vicino a } x_0 \text{ ha lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0)}$$

OSS n dispari $\Rightarrow$ $n-2$ dispari

$\Rightarrow \quad f''(x)$ cambia segno attraversando x_0

$\Rightarrow$ pto di flesso

$\square$

Uso del polinomio di Taylor per il calcolo approssimato di funzioni.

Se $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0, si scrive

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x) \qquad \text{dove } \underline{E_n(x)} = f(x) - T_n(x)$$

resto n-esimo, errore.

Il teorema del resto di Peano dice che (sotto opportune ipotesi).

$$E_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Il prossimo risultato dice qualcosa su $E_n(x)$ quando x_0 e x sono fissati.

TEOREMA (resto di Lagrange del polinomio di Taylor).

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b),

Siano $x, x_0 \in (a,b)$, $x_0 \neq x$, e sia $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$ il resto di Taylor, dove T_n è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0.

Allora $\exists\, c$ strett. compreso tra x_0 e x t.c

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Quindi si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

OSS 1 La forma del resto di Lagrange è molto simile al successivo termine dello sviluppo di Taylor

---

OSS 2. Per $n=0$ il teorema dice che

$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$ è il teorema di Lagrange!

Esempio Calcolare e con un errore inferiore a 10^{-3}.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$ con c compreso tra 0 e x.

$\boxed{x=1}$

$$\underset{\uparrow}{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{(n+1)!}}}_{E_n(1)} \qquad c \in (0,1)$$

Voglio cercare n in modo che $|E_n(1)| < 10^{-3}$

$$0 \leq E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$$

$n=3$ $\quad 4! = 24$

$n=4$ $\quad 5! = 120$

$n=5$ $\quad 6! = 720$

$\boxed{n=6}$ $\quad 7! = 5040$ ok!

Il valore approssimato di e cercato è

$$T_6(1) = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

$$= \frac{1957}{720} \approx 2{,}71806$$

Si tratta di un valore approssimato per difetto ($E_{n+1} > 0$).

il valore di e è 2,71828 ...

la differenza è di circa $2 \cdot 10^{-4}$

Calcoliamo $\sin 1$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + E_{2n+2}(x)$$

$$x = 1$$

$$\sin 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + E_{2n+2}(1)$$

$$E_{2n+2}(1) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} \cancel{1^{2n+3}} = \frac{\pm \cos c}{(2n+3)!} \qquad c \in (0,1)$$

$$|E_{2n+2}(1)| = \frac{|\cos c|}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(2n+3)! > 1000$$

basta $\boxed{n=2.}$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + E_6(1)$$

$$= \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}84167.$$

$$E_6 = \frac{(\sin)^{(7)}(c)}{5040} = \frac{-\cos c}{5040} < 0.$$

Quindi il valore approssimato è un'approx per eccesso.

La calcolatrice fornisce $0{,}84147$

Calcolare il valore di $\sqrt{17}$ con un errore inferiore a 10^{-6}

1° modo $\sqrt{17} = \sqrt{1+16} = \sqrt{1+x}$ con $x = 16$.

Sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$$\sqrt{1+x} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k}_{T_n(x)} + E_n(x)$$

$x = 16$

$$\sqrt{17} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} \underbrace{16^k}_{\substack{\shortparallel \\ 2^{4k}}} + E_n(16)$$

$$E_n(16) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 16^{n+1} = \binom{1/2}{n+1} (1+c)^{-n-1/2} 2^{4n+4}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$$

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(1+x)^{1/2-k} = \binom{1/2}{k}(1+x)^{1/2-k}$$

$$|E_n(16)| = \left|\binom{1/2}{n+1}\frac{2^{4n+4}}{(1+c)^{n+1/2}}\right| \leq \left|\binom{1/2}{n+1}\right| 2^{4n+4} \qquad 0 < c < 16$$

Purtroppo questa quantità tende a $+\infty$ quando $n \to +\infty$.

Il problema è che $x_i - x_0 = 16$ è "troppo grande"

2° modo:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$$

$$f(x) = 4\sqrt{1+x} \qquad x_0 = 0, \quad x = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{17} = f\left(\frac{1}{16}\right) = 4\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}2^{-4k} + E_n\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\left|E_n\left(\frac{1}{16}\right)\right| = \left|4\binom{1/2}{n+1}\overset{\leq 1}{\boxed{\frac{1}{(1+c)^{n+1/2}}}}\,\frac{1}{16^{n+1}}\right| = \qquad 0<c<\frac{1}{16}$$

$$= \left|\binom{1/2}{n+1}\right|\frac{1}{2^{4n+2}} < 10^{-6}$$

$n = 5$

$$\binom{1/2}{6} = \frac{1/2\left(-1/2\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-9/2\right)}{6!}$$

$$\left|\binom{1/2}{6}\right|\frac{1}{2^{22}} = \frac{1/2\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{9}{2}}{6!}$$