

**ANALISI VETTORIALE**  
**LT FISICA 30046 - A.A. 2024/25**  
**SCHEDA 10 - 20241206**

EUGENIO MONTEFUSCO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA  
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

---

ESERCIZIO 1. Data una curva regolare di parametrizzazione  $x(s) = (x_1(s), 0, x_3(s))$ , con  $s \in [a, b]$ , si scriva la parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando la curva attorno all'asse  $x_3$  di un angolo  $\theta_0$  e si verifichi che, aggiungendo qualche ipotesi, si tratta di una superficie regolare.

---

ESERCIZIO 2. Sia  $\gamma$  una curva polare semplice, chiusa e regolare di equazione  $\rho = f(\theta)$ , con  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ . Supponendo che  $\gamma$  sia la frontiera di un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  si dimostri che

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)|^2 d\theta$$

---

ESERCIZIO 3. Sia  $F_\alpha(x) = kr^\alpha (x_1, x_2, x_3)$ , con  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|_2^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , un campo centrale, si determini il flusso uscente dalla sfera  $B(O, R)$  al variare del parametro  $\alpha$  e si verifichi che  $\text{rot}(F_\alpha) = \mathbf{0}$ .

---

ESERCIZIO 4. Verificare la validità delle ipotesi e dell'enunciato del teorema del rotore quando il campo vettoriale è  $F(x) = (0, x_1, 0)$  e la superficie  $\Sigma = \phi(K)$ , dove  $(u, w) \in K = [0, \pi]^2$  e  $\phi(u, w) = (\sin(u) + \sin(w), u, w)$ .

---

ESERCIZIO 5. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale  $F = (a, b, c)$  lungo il cammino  $\gamma = \partial\Sigma$ , con  $\Sigma$  superficie regolare a tratti.

---

ESERCIZIO 6. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale  $F = (-x_2^3, x_1^3, x_3^3)$  lungo la curva  $\gamma$  ottenuta dall'intersezione del cilindro di equazione  $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  e del piano  $\{x_1 + x_3 = 3\}$ , orientata in verso antiorario se vista dall'alto.

---

ESERCIZIO 7. Sia  $M = \{G(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  un sottoinsieme dello spazio tale che  $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $O \in M$  e  $\partial_3 G(O) \neq 0$ . Allora si scriva

i. l'equazione del piano tangente ad  $M$  in  $O$ ,

ii. l'equazione del versore normale ad  $M$  in  $O$ ,

iii. l'espressione della prima forma fondamentale di  $M$  in  $O$ .

Infine si spieghi perché  $M$ , intorno ad  $O$ , è una superficie regolare.

---

ESERCIZIO 8. Assegnati la regione dello spazio  $D = \{1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$  e il campo vettoriale  $F(x) = (x_1, x_2, 0)$ , si calcoli la quantità  $\Phi_{\partial D}(F)$ .

---

ESERCIZIO 9. Si calcoli il flusso  $\Phi_{\partial D}(F)$ , dove  $D = B(O, r)$  e  $F = (a, b, c)$ .

---

## SVOLGIMENTI

**ESERCIZIO 1.** Calcolare il volume del toro ottenuto ruotando intorno all'asse  $x_3$  il cerchio contenuto nel piano  $\{x_2 = 0\}$   $B = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - R)^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ , con  $0 < r < R$ .

**DISCUSSIONE.** Ricalcando lo svolgimento dell'esercizio precedente proponiamo più svolgimenti per il calcolo del volume del toro.

Il teorema di Guldino, in questo caso, si rivela particolarmente efficace, in quanto la sezione del toro è un cerchio, il cui baricentro coincide con il centro geometrico, almeno per densità di massa uniformi, quindi possiamo ottenere rapidamente

$$m_3(T) = 2\pi b_1 m_2(B) = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

Volendo calcolare il volume integrando per sezioni troviamo che

$$m_3(T) = \int_{-r}^r m_2(S(t)) dt$$

dove le sezioni orizzontali  $S(t)$  sono le seguenti corone circolari

$$S(t) = T \cap \{x_3 = t\} = \left\{ \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R \right)^2 + t^2 \leq r^2 \right\} = \left\{ R - \sqrt{r^2 - t^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R + \sqrt{r^2 - t^2} \right\}$$

la cui misura è

$$m_2(S(t)) = \pi \left[ \left( R + \sqrt{r^2 - t^2} \right)^2 - \left( R - \sqrt{r^2 - t^2} \right)^2 \right] = 4\pi R \sqrt{r^2 - t^2}$$

a questo punto possiamo concludere

$$m_3(T) = \int_{-r}^r m_2(S(t)) dt = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2} dt = 4\pi R \cdot \frac{\pi}{2} r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

Per terminare impostiamo lo svolgimento del calcolo del volume del toro tramite integrazione per fili. Ricordando che

$$m_3(T) = \iint_{S_0} m_1(S(w)) dw_1 dw_2 \quad \text{dove} \quad \begin{cases} S_0 = \{(R-r)^2 \leq w_1^2 + w_2^2 \leq (R+r)^2\} \\ S(w) = \left\{ |t| \leq \left[ r^2 - \left( \sqrt{w_1^2 + w_2^2} - R \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{cases}$$

ricaviamo un integrale che risolveremo tramite le coordinate polari  $w = (w_1, w_2) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta))$  e il successivo cambio di variabile reale  $\rho = R + r \sin(s)$

$$\begin{aligned} m_3(T) &= 2 \iint_{S_0} \left[ r^2 - \left( \sqrt{w_1^2 + w_2^2} - R \right)^2 \right]^{1/2} dw_1 dw_2 = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} \left[ r^2 - (\rho - R)^2 \right]^{1/2} \rho d\rho \\ &= 4\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \sin(s)) \cos^2(s) ds = 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(s) ds = 2\pi^2 r^2 R \end{aligned}$$

■

**ESERCIZIO 2.** Sia  $\gamma$  una curva polare semplice, chiusa e regolare di equazione  $\rho = f(\theta)$ , con  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ . Supponendo che  $\gamma$  sia la frontiera di un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  si dimostri che

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} |f(\theta)|^2 d\theta$$

**DISCUSSIONE.** Le formule di Gauss-Green ci permettono di affermare che

$$\text{Area}(D) = \int_{\gamma} x_1 dx_2 = - \int_{\gamma} x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

Ricordando le relazioni che legano variabili cartesiane e variabili polari, otteniamo per la curva  $\gamma$  la seguente equazione parametrica  $x(\theta) = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , dove il parametro  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ , e derivando otteniamo che  $x'_1(\theta) = f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)$  e che  $x'_2(\theta) = f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)$ , dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)\cos(\theta)(f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)) - f(\theta)\sin(\theta)(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)|^2 d\theta \end{aligned}$$

Si noti che l'uso della forma differenziale  $\omega = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$  ci ha permesso di semplificare notevolmente l'espressione da integrare. ■

**ESERCIZIO 3.** Sia  $F_{\alpha}(x) = kr^{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ , con  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|_2^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , un campo centrale, si determini il flusso uscente dalla sfera  $B(O, R)$  al variare del parametro  $\alpha$  e si verifichi che  $\text{rot}(F_{\alpha}) = \mathbf{0}$ .

**DISCUSSIONE.** Dalla definizione abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{rot}(F_{\alpha}(x)) &= k(\partial_2(x_3 r^{\alpha}) - \partial_3(x_2 r^{\alpha}), \partial_3(x_1 r^{\alpha}) - \partial_1(x_3 r^{\alpha}), \partial_1(x_2 r^{\alpha}) - \partial_2(x_1 r^{\alpha})) \\ &= k(\alpha x_2 x_3 r^{\alpha-2} - \alpha x_2 x_3 r^{\alpha-2}, \alpha(x_1 x_3 - x_1 x_3) r^{\alpha-2}, \alpha(x_1 x_2 - x_1 x_2) r^{\alpha-2}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

quindi il campo  $F_{\alpha}$  ha rotore nullo indipendentemente dalla sua intensità  $\alpha$ .

Riguardo al flusso del campo attraverso la superficie chiusa, determinata dal bordo della palla  $B(O, R)$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial B(O, R)}(F_{\alpha}) &= \int_{\partial B(O, R)} F_{\alpha} \cdot n d\sigma = k \int_{\|x\|=R} r^{\alpha}(x_1, x_2, x_3) \cdot \frac{(x_1, x_2, x_3)}{R} d\sigma \\ &= k \int_{\|x\|=R} \frac{r^{\alpha+2}}{R} d\sigma = kR^{\alpha+1} \int_{\|x\|=R} d\sigma = kR^{\alpha+1} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kR^{\alpha+3} \end{aligned}$$

si noti che il flusso è costante solo se  $\alpha = -3$  (che corrisponde al caso del campo gravitazionale o coulombiano). Inoltre è opportuno sottolineare che quando  $\alpha < 0$  il campo è singolare e non è definito nell'origine  $O$ , in tali casi non è corretto usare il teorema della divergenza perché  $F \notin C^1(B(O, R + \epsilon))$ . ■

**ESERCIZIO 4.** Verificare la validità delle ipotesi e dell'enunciato del teorema del rotore quando il campo vettoriale è  $F(x) = (0, x_1, 0)$  e la superficie  $\Sigma = \phi(K)$ , dove  $(u, w) \in K = [0, \pi]^2$  e  $\phi(u, w) = (\sin(u) + \sin(w), u, w)$ .

**DISCUSSIONE.** Verificare la validità delle ipotesi non è molto impegnativo, in particolare osserviamo che la superficie è un pezzo del grafico di una funzione differenziabile, quindi regolare ed orientabile. Effettuiamo il calcolo esplicito degli integrali premettendo il calcolo di alcune necessarie quantità

$$\partial_1 \phi = (\cos(u), 1, 0) \quad \partial_2 \phi = (\cos(w), 0, 1) \quad \partial_1 \phi \wedge \partial_2 \phi = (1, -\cos(u), -\cos(w))$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(F) &= \int_{\Sigma} (F \cdot n) d\sigma = \int_K F(\phi(u, w)) \cdot (\partial_1 \phi \wedge \partial_2 \phi) du dw \\ &= \int_K (0, \sin(u) + \sin(w), 0) \cdot (1, -\cos(u), -\cos(w)) du dw \\ &= - \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(u) + \sin(w)] \cos(u) du dw = 0 \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo

$$\oint_{\partial \Sigma} [\text{rot}(F) \cdot T] ds = \int_{\gamma_1} (0, 0, 1) \cdot \psi'_1(t) dt$$

dove  $\gamma_i$ , per  $i = 1, \dots, 4$ , sono le curve che costituiscono il bordo della superficie  $\Sigma$  aventi le seguenti parametrizzazioni

$$\begin{aligned}\gamma_1: \quad \psi_1(t) &= (\sin(t), t, 0) & t \in [0, 1] & \quad \text{e} \quad \psi'_1(t) = (\cos(t), 1, 0) \\ \gamma_2: \quad \psi_2(t) &= (\sin(t), 0, t) & t \in [0, 1] & \quad \text{e} \quad \psi'_2(t) = (\cos(t), 0, 1) \\ \gamma_3: \quad \psi_3(t) &= (-\sin(t), -t, 0) & t \in [0, 1] & \quad \text{e} \quad \psi'_3(t) = (-\cos(t), -1, 0) \\ \gamma_4: \quad \psi_4(t) &= (-\sin(t), 0, -t) & t \in [0, 1] & \quad \text{e} \quad \psi'_4(t) = (-\cos(t), 0, -1)\end{aligned}$$

dopo questa precisazione otteniamo

$$\oint_{\partial\Sigma} [\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}] ds = \int_{\gamma_2} (0, 0, 1) \cdot \psi'_2(t) dt + \int_{\gamma_4} (0, 0, 1) \cdot \psi'_4(t) dt = \int_0^1 dt + \int_0^1 (-1) dt = 0$$

in questo modo la verifica è completata. ■

**ESERCIZIO 5.** Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale  $\mathbf{F} = (a, b, c)$  lungo il cammino  $\gamma = \partial\Sigma$ , con  $\Sigma$  superficie regolare a tratti.

**DISCUSSIONE.** Per rispondere alle pretese dell'esercizio basta osservare che il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è regolare su tutto  $\mathbb{R}^3$ , quindi è possibile applicare il teorema del rotore e dedurre che

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\Sigma} [\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] d\sigma = 0$$

infatti il rotore di un campo vettoriale costante è sempre nullo. Si noti che l'indecisione nel segno dell'integrale di superficie (causata dal non avere informazioni sull'orientazione di  $\Sigma$ ) in questo caso non pregiudica la possibilità di portare a termine l'esercizio... ■

**ESERCIZIO 6.** Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale  $\mathbf{F} = (-x_2^3, x_1^3, x_3^3)$  lungo la curva  $\gamma$  ottenuta dall'intersezione del cilindro di equazione  $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  e del piano  $\{x_1 + x_3 = 3\}$ , orientata in verso antiorario se vista dall'alto.

**DISCUSSIONE.** Possiamo applicare il teorema di Stokes se pensiamo  $\gamma$  come bordo della superficie piana

$$\Sigma: \quad \{x_3 = 3 - x_1 \text{ con } (x_1, x_2) \in D\} \quad \text{dove} \quad D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

quindi si ha

$$\int_{\gamma} [\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}] ds = \iint_{\Sigma} [\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] d\sigma$$

con il versore  $\mathbf{n}$  orientato verso l'alto e  $\mathbf{T}$  antiorario se visto dall'alto. Poiché si ha

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, 3(x_1^2 + x_2^2)) \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

segue che il lavoro  $W$  vale

$$W = \iint_{\Sigma} [\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] d\sigma = \iint_D 3(x_1^2 + x_2^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} dx_1 dx_2 = 6\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi$$

L'alternativa consiste nello svolgere l'esercizio applicando la definizione di lavoro, cioè svolgendo un integrale di linea: poiché la curva  $\gamma$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x}(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 3 - \cos(\theta)) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

troviamo che

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{j=1}^3 F_j(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) x'_j(\theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin^3(\theta))(-\sin(\theta)) + \cos^3(\theta)\cos(\theta) + (3 - \cos(\theta))^3 \sin(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \right] d\theta = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

ricordando un po' di trigonometria...



**ESERCIZIO 7.** Sia  $M = \{G(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  un sottoinsieme dello spazio tale che  $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $O \in M$  e  $\partial_3 G(O) \neq 0$ . Allora si scriva

- i. l'equazione del piano tangente ad  $M$  in  $O$ ,
- ii. l'equazione del versore normale ad  $M$  in  $O$ ,
- iii. l'espressione della prima forma fondamentale di  $M$  in  $O$ .

Infine si spieghi perché  $M$ , intorno ad  $O$ , è una superficie regolare.

**DISCUSSIONE.** i. & ii. Le ipotesi contenute nel testo ci permettono di applicare il teorema delle funzioni implicite per rispondere alle richieste dell'esercizio. Dunque osserviamo subito che il teorema di Dini assicura l'esistenza di una funzione  $g \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ , con  $B = B(O, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$ , tale che

- i.  $g(O) = 0$
- ii.  $G(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$  per ogni  $(x_1, x_2) \in B$
- iii. se  $\|x - O\|_2 \leq \delta$  e  $G(x) = 0$  allora  $x_3 = g(x_1, x_2)$

inoltre sappiamo che

$$\nabla g(x_1, x_2) = - \frac{1}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))} (\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2)), \partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2)))$$

quindi, in particolare, vale che

$$\nabla g(O, O) = - \frac{(\partial_1 G(O), \partial_2 G(O))}{\partial_3 G(O)}$$

questo ci permette di ottenere l'equazione del piano tangente ad  $M$  in  $O$ , come l'equazione del piano tangente al grafico di  $g$  nel punto  $O = (O, O, g(O, O))$ , che è

$$x_3 = g(O, O) + \nabla g(O, O) \cdot (x_1, x_2) = - \frac{\partial_1 G(O)x_1 + \partial_2 G(O)x_2}{\partial_3 G(O)}$$

che possiamo riscrivere, più elegantemente, nel seguente modo

$$\partial_1 G(O)x_1 + \partial_2 G(O)x_2 + \partial_3 G(O)x_3 = \nabla G(O) \cdot x = 0$$

Dalla precedente espressione segue che il versore normale al piano tangente, e quindi ad  $M$ , è  $\frac{\nabla G(O)}{\|\nabla G(O)\|_2}$ .

iii.  $M$  è, nei dintorni di  $O$ , una superficie regolare in quanto è il grafico di una funzione di classe  $C^1$ , come prova il teorema della funzione implicita, e il teorema in questione suggerisce anche una buona parametrizzazione della superficie

$$x(u) = (u_1, u_2, g(u_1, u_2)) \quad \text{con} \quad u = (u_1, u_2) \in B$$

inoltre vale

$$\begin{aligned} \partial_1 x(u) &= (1, 0, \partial_1 g(u_1, u_2)) = \left(1, 0, -\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right) \\ \partial_2 x(u) &= (0, 1, \partial_2 g(u_1, u_2)) = \left(0, 1, -\frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right) \\ \partial_1 x \wedge \partial_2 x &= \left(\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}, \frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}, 1\right) \end{aligned}$$

a questo punto è facile ricavare i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie, che sono

$$\begin{aligned} E &= \partial_1 x \cdot \partial_1 x = 1 + \left[\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right]^2 \\ F &= \partial_1 x \cdot \partial_2 x = \frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \cdot \partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{|\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))|^2} \\ G &= \partial_2 x \cdot \partial_2 x = 1 + \left[\frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right]^2 \end{aligned}$$

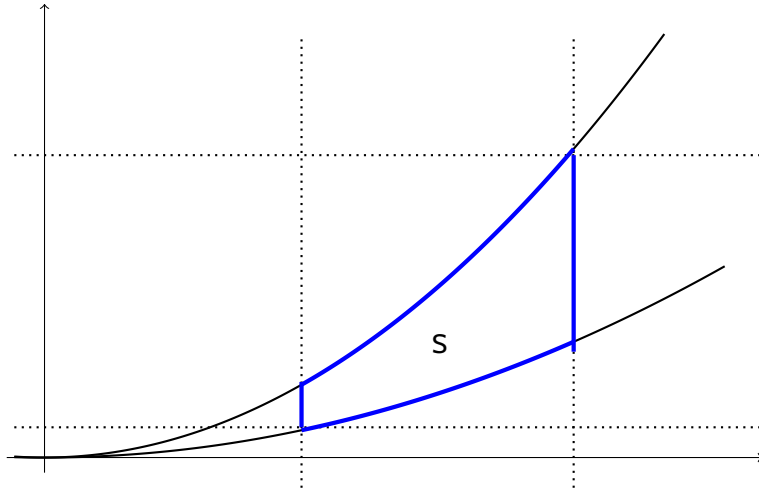
il che mette fine allo svolgimento. ■

**ESERCIZIO 8.** Assegnati la regione dello spazio  $D = \{1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$  e il campo vettoriale  $F(x) = (x_1, x_2, 0)$ , si calcoli la quantità  $\Phi_{\partial D}(F)$ .

**DISCUSSIONE.** Il flusso del campo vettoriale  $F$  attraverso la frontiera del dominio  $D$  (superficie regolare a tratti composta da più superfici) può essere calcolato, grazie al teorema della divergenza, aggirando il calcolo di più integrali superficiali e riducendo il tutto ad un unico integrale di volume, infatti vale

$$\Phi_{\partial D}(F) = \int_{\partial D} (F \cdot n) d\sigma = \int_D \operatorname{div}(F)(x) dx = \int_D 2x_1 dx_2 dx_3 = 2m_3(D)$$

Osserviamo che il dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  è un solido avente simmetria assiale e la sua sezione  $S$  ha il seguente profilo



dove  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  è la distanza dall'asse  $x_3$  di rotazione. Quindi possiamo calcolare la misura di  $D$  grazie alle coordinate cilindriche nel seguente modo

$$\begin{aligned} m_3(D) &= \int_D dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\bar{D}} \rho d\rho d\theta dz = \int_1^{\sqrt{2}} \left[ \int_{\rho^2}^4 \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] dz \right] \rho d\rho = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[ 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

così da concludere che  $\Phi_{\partial D}(F) = 5\pi$ . ■

**ESERCIZIO 9.** Si calcoli il flusso  $\Phi_{\partial D}(F)$ , dove  $D = B(O, r)$  e  $F = (a, b, c)$ .

**DISCUSSIONE.** L'esercizio non presenta particolari difficoltà, il calcolo del flusso in questione (cioè dell'integrale di superficie) può essere aggirato tramite il teorema della divergenza, visto che il campo vettoriale è sufficientemente regolare e la superficie è regolare ed è il bordo di un dominio. In particolare notiamo che

$$\operatorname{div}(F) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \partial_1 a + \partial_2 b + \partial_3 c = 0$$

da cui segue che

$$\Phi_{\partial D}(F) = \int_{\partial D} [F \cdot n] d\sigma = \int_D \operatorname{div}(F)(x) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

si noti che ogni campo vettoriale costante ha divergenza nulla, quindi il risultato ottenuto resta vero per ogni dominio  $D$  per cui vale il teorema della divergenza! ■