Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 8 di
$f(x) = \sin(x^2)$.

1° modo Calcolare le derivate fino all'ordine 8.

$f'(x) = 2x\cos(x^2)$

$f''(x) = \ \ldots$

molto inefficiente.

2° modo. Polinomio di Maclaurin di sen t

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Quando $x \to 0$, $x^2 \to 0$ e quindi posso sostituirlo al posto di t

$$\sin(x^2) = \underbrace{x^2 - \frac{x^6}{6}}_{\text{polinomio di grado 6}} + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0$$

Ho trovato un polinomio $P_6(x)$ di grado $6 \leq 8$ t.c.

$$f(x) - P_6(x) = o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0.$$

$\Rightarrow$ per la parte di unicità del teorema del resto di Taylor quello trovato è il polinomio di Maclaurin di $f(x)$ di ordine 8.

$$f(x) = \underbrace{x^2 - \frac{x^6}{6}}_{} + o(x^8).$$

è il polinomio cercato.

Quanto vale $f^{(10)}(0)$? $f^{(8)}(0)$?

Faccio il polinomio di Maclaurin di ordine 10.

$$\text{sen}\, t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6) \qquad t \to 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = \operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + o(x^{12}) \qquad x \to 0.$$

$f^{(8)}(0) = 0$ perché non c'è termine di grado 8 nel polinomio

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{120} \Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10!}{120} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

La formula $\underbrace{f(x) = T_n(x) + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{Resto di Peano}}}$ per $x \to x_0$

Calcolare lo sviluppo di Maclaurin di $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad \boxed{f'(0) = \alpha}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1).$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$$

coeff^{te} binomiale generalizzato

$\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

lo sviluppo di Maclaurin diventa

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{per } x\to 0\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n).\end{aligned}}$$

OSS se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, abbiamo trovato

$$(1+x)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k}_{T_n(x)} + o(x^n)$$

questo resto è proprio zero, per la formula del binomio di Newton.

calcoliamo in questo caso $T_{n+1}(x)$. Devo aggiungere il termine

$$\binom{n}{n+1} = \frac{n\cdot(n-1)\dots 0}{(n+1)!} = 0$$

e in generale $\binom{n}{k} = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N},\ k>n.$

$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad \alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \qquad + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}x^k + o(x^n)$$

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k\, k!}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k\, k!} x^k + o(x^n)$$

Polinomio di Maclaurin di ordine 3 di

$$f(x) = e^{2x} - 3\sin x$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad t \to 0$$

metto $2x \to 0$ al posto di $t \to 0$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underbrace{o((2x)^3)}_{= o(x^3)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$-3\sin x = -3x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - 3x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= \underbrace{1 - x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3}_{T_3(x)} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

In generale, detto $T_n(x; f)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ centrato in x_0.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T_n(x; \alpha f + \beta g) = \alpha\, T_n(x; f) + \beta\, T_n(x; g)$$

Cosa succede se derivo un polinomio di Taylor

$$(T_n(x;f))' = ?$$

$$\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$\boxed{\begin{aligned}(T_n(x;f))' &= \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)' \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} = \\ &= T_{n-1}(x; f')\end{aligned}}$$

In altre parole: $(T_n(x;f))' = T_{n-1}(x;f')$

La derivata del polinomio di Taylor è il polinomio di Taylor della derivata.

Usiamo questa proprietà per calcolarci altri sviluppi di Taylor.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

<u>OSS</u> $\quad D(\log(1-x)) = -\frac{1}{1-x}$

Quindi: il polinomio di Maclaurin di $f(x) = \log(1-x)$ deve essere tale che, derivato, mi dà quello di $-\frac{1}{1-x}$

$$\boxed{\begin{aligned}\log(1-x) &= \cancel{f(0)} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ &\quad\ \ \overset{\shortparallel}{0} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\end{aligned}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

metto $-x$ al posto di x

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

metto x^2 al posto di x

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Poiché $D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$\operatorname{arctg} x = \cancel{\operatorname{arctg} 0} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{oppure } o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

Sostituisco $-x^2 \to 0$ (per $x \to 0$) al posto di x.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

Tenuto conto che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, otteniamo

$$\arcsin x = \cancel{\arcsin 0} + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{-1/2}{k} (-1)^k}\, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$n=3$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{3}{8}$$

Si può verificare che il precedente sviluppo dell'arcsin si può scrivere nella forma

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \quad x \to 0.$$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) \qquad x \to 0.}$$

Calcolare il polinomio di Maclaurin di $\operatorname{tg} x$ di ordine 5.

1° modo: calcolare le derivate di $\operatorname{tg} x$ fino al 5° ordine

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg} x\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = 2\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x\right)$$

$$f'''(x) = 2\left(1 + 3\operatorname{tg}^2 x\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$$

2° modo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \qquad t \to 0$$

L'idea è di sostituire t con $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5) \to 0$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)}=1+\underbrace{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)}_{\overset{\shortparallel}{t}}+\frac{x^4}{4}=$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$$

$$t^2=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$$

$$t^3=\left(\qquad\qquad\right)^3=o(x^5)$$

$$o(t^3)=o(x^5)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{2}+\frac{5}{24}x^5+o(x^5)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}=$$

$$=\underbrace{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5}+o(x^5) \qquad \text{per } x\to 0.$$

$$\frac{5}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}=\frac{25-10+1}{120}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor, questo è il polinomio di Taylor della tangente

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6) \qquad \text{per } x\to 0.$$

Trovare l'ordine di infinitesimo di

$$f(x)=3\operatorname{tg} x-3x-x^3 \qquad \text{per } x\to 0.$$

$$f(x)=\cancel{3x}+\cancel{x^3}+\frac{2}{5}x^5+o(x^6)\cancel{-3x}\cancel{-x^3}=\frac{2}{5}x^5+o(x^6)$$

$$\sim \frac{2}{5}x^5$$

infinitesimo di ordine 5.

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$, di

$$f(x) = e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e - e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= e\left(1 - e^{\underbrace{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}}\right) \sim e\left(1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$\left[\; x\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\sim\frac{1}{x}} - 1 \to 0 \qquad e^t - 1 \sim t \qquad t \to 0 \;\right]$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{t}\log(1+t)\right) = e\left(1 - \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) =$$

$\frac{1}{x} = t \to 0$

$$\boxed{\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}$$

$$= e\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{t}{2} + o(t)\right) \sim$$

$$\sim \frac{e}{2}t = \frac{e}{2x} \quad \text{ord.}^{\text{ne}} \text{ di infinitesimo } 1.$$

$\boxed{\text{Infatti}}$ $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2) \qquad t \to 0$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2) \qquad t \to 0.$$

$$\log(1+t) = 0 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad t \to 0$$