Consideriamo la seguente successione:

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \end{cases}}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{7}{4}\right) = \frac{23}{8}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{8} + \frac{7\cdot 8}{23}\right) = \dots$$

Vediamo se la successione decresce.

$$\underbrace{a_{n+1}}_{=\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \leq a_n \qquad \times\, 2a_n > 0$$

$$\iff a_n^2 + 7 \leq 2a_n^2 \iff a_n^2 \geq 7 \iff$$

$$\iff a_n \geq \sqrt{7}$$

Vediamo se $a_n \geq \sqrt{7}$ $\forall n$. (per induzione)

$$4 = a_0 \overset{?}{\geq} \sqrt{7} \qquad \text{ok!}$$

$$\text{se } a_n \geq \sqrt{7} \implies \underbrace{a_{n+1}}_{=\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)} \overset{?}{\geq} \sqrt{7} \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \geq \sqrt{7} \qquad \times\, 2a_n$$

$$\iff a_n^2 + 7 \overset{?}{\geq} 2\sqrt{7}\, a_n \iff \underbrace{a_n^2 - 2\sqrt{7}\, a_n + 7}_{=(a_n - \sqrt{7})^2} \geq 0$$

vera!

e non abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

Abbiamo provato che $a_n \geq \sqrt{7}$ $\forall n$

$\implies a_n$ decrescente. (e limitata inferiormente)

$$\exists\ L = \lim_{n \to +\infty} a_n \in [\sqrt{7}, 4]$$

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\downarrow \\ L}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)}}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right) \quad \times 2L$$

$$2L^2 = L^2 + 7 \Rightarrow L^2 = 7 \Rightarrow L = \sqrt{7}.$$

$\boxed{\text{La succ}^{\text{ne}} \text{ tende decrescendo a } \sqrt{7}.}$

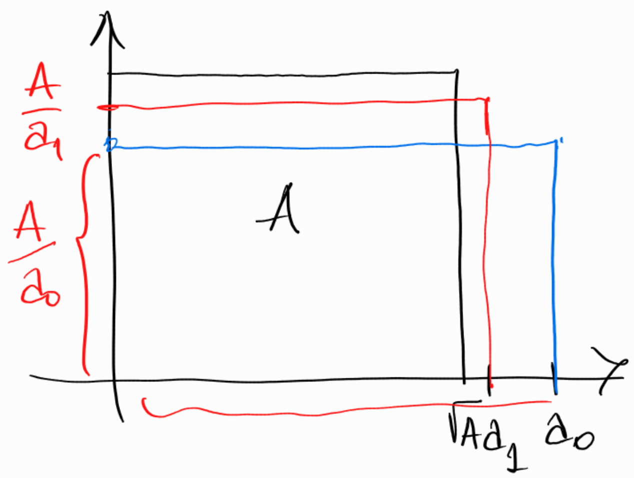
In realtà questo si può modificare come segue

Fisso $A > 0$. Considero

$$\begin{cases} a_0 > \sqrt{A} & \text{assegnato} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \end{cases}$$

si mostra che la succ$^{\text{ne}}$ è decrescente e tende a $\sqrt{A}$.

Algoritmo di Erone per il calcolo della radice



Pongo $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right)$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$

Come si analizza la velocità di convergenza?

Si considera l'errore.

Errore assoluto $= |a_n - \sqrt{A}| = a_n - \sqrt{A}$

Errore relativo $= \dfrac{|a_n - \sqrt{A}|}{\sqrt{A}} = \dfrac{a_n - \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \underbrace{\dfrac{a_n}{\sqrt{A}} - 1}_{} =: \varepsilon_n$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{A}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)}{\sqrt{A}} - 1 =$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{A}} = 1 + \varepsilon_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{A}} + \frac{\sqrt{A}}{a_n}\right) - 1$$

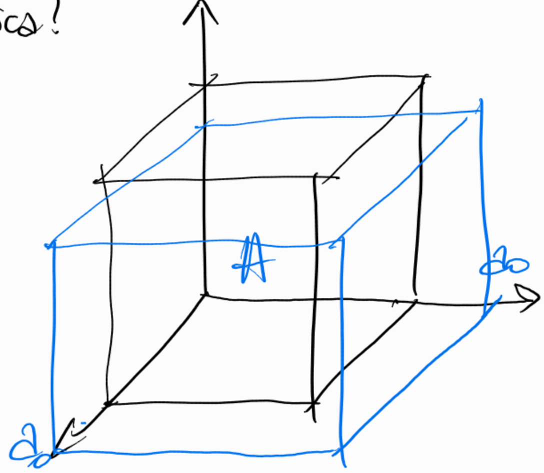
$$= \frac{1}{2}\left(-1 + \varepsilon_n + \frac{1}{1+\varepsilon_n}\right) \cancel{-1} = \frac{(\varepsilon_n - 1)(\varepsilon_n + 1) + 1}{2(1+\varepsilon_n)} =$$

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2\underbrace{(1+\varepsilon_n)}_{\geq \varepsilon_n,\ \geq 1}} \leq \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_n}{2} \\[2mm] \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} \end{cases}}$$

convergenza velocissima per ε_n piccolo

$$\varepsilon_4 \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow \varepsilon_5 \leq \frac{1}{2 \cdot 10^6} \Rightarrow \varepsilon_6 \leq \frac{1}{4 \cdot 10^{12}}$$

Come ragionare per trovare un algoritmo che approssimi la radice cubica?



$$a_0,\ a_0,\ \frac{A}{a_0^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(a_0 + a_0 + \frac{A}{a_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2a_0 + \frac{A}{a_0^2}\right)$$

L'algoritmo diventa

$$\boxed{\begin{cases} a_0 > \sqrt[3]{A} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2a_0 + \dfrac{A}{a_0^2}\right) \end{cases}}$$

Si dimostra che:

1) a_n decresce
2) $a_n \longrightarrow \sqrt[3]{A}$
3) La velocità di convergenza è quadratica

$$\varepsilon_{n+1} \le C\,\varepsilon_n^2$$

In generale si può trovare un algoritmo per calcolare $\sqrt[k]{A}$.

$$\boxed{\begin{cases} a_0 > \sqrt[k]{A} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{k}\left((k-1)a_n + \dfrac{A}{a_n^{k-1}}\right) \end{cases}}$$