

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + k_3 = n}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$$

Coeff^{ti} multinomiali

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}$$

rappresenta il numero di modi in cui posso mettere n oggetti in 3 cassetti in modo che nel primo cassetto ce ne siano k_1 , nel secondo k_2 , nel terzo k_3 ($k_1 + k_2 + k_3 = n$).

OSS

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k}$$

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_h)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_h \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_h = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_h} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_h^{k_h}$$

Questi coeff^{ti} multinomiali sono anche legati al problema degli anagrammi già visto nelle scorsa lezioni.

Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA?

$$\frac{10!}{3! 2! 2!}$$

n lettere

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

Ho 6 cassetti



A	3
T	2
M	2
I	1
E	1
C	1

Il numero di modi in cui posso farlo è

$$\binom{10}{3, 2, 2, 1, 1, 1} = \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}$$

Principio di induzione È una tecnica dimostrativa per provare che una certa affermazione $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si basa su due passi

1) $P(0)$ è vera.
 $P(1)$

2) supponendo vera $P(n)$, si dimostra che è vera anche $P(n+1)$.

Fatti questi due passi, è evidente che $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \cancel{7} \quad \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dim. per induzione

1) $P(1)$ $\sum_{k=1}^1 k \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ OK!

2) Supponiamo $P(n)$ vera, cioè $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
Voglio provare $P(n+1)$, cioè $\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ per ipotesi induttiva}} + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{divido per } n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \frac{n+2}{2} \quad \text{OK.}$$

n pari Dim. "costruttiva".
(per es. $n=100$)

$$\cancel{1} + \cancel{2} + 3 + 4 + \dots + 98 + \cancel{99} + \cancel{100}$$

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

tutto questo lo ripeto per $50 = \frac{100}{2}$ volte.

$$S = 101 \cdot \frac{100}{2}$$

n dispari? per es. $n=101$.

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 101$$

$$0 + 101 = 101$$

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$\text{Lo ripeto per } \frac{102}{2} \text{ coppie} \Rightarrow S = 101 \cdot \frac{102}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = ?$$

Proviamo che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$P(n)$

$$1) P(1) \text{ è vera? } \sum_{k=1}^1 k^2 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1 \quad \text{vera!}$$

2) Supponiamo vera $P(n)$, mostriamo che è vera anche $P(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

//

$$\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ per ipotesi induttiva}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$n(2n+1) + 6(n+1) \stackrel{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

$$2n^2 + n + 6n + 6 \stackrel{?}{=} 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

Provare per caso

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Dis. di Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(n) \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1$$

$$1) P(0) \quad (1+x)^0 \stackrel{?}{\geq} 1+0x$$

$$1 \stackrel{?}{\geq} 1 \quad \underline{\text{ok!}}$$

$$P(1) \quad (1+x)^1 \stackrel{?}{\geq} 1+1 \cdot x$$

$$1+x \stackrel{?}{\geq} 1+x \quad \text{ok!}$$

$$2) P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

supponiamo $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1.$

Voglio provare che

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad \forall x \geq -1$$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{VI} (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \stackrel{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

ipotesi induttiva $x \geq -1$
 $1+nx$ per ipotesi induttiva

$$\cancel{1+x} + \cancel{nx} + nx^2 \stackrel{?}{\geq} \cancel{1+nx} + \cancel{x}$$

$\Downarrow$
 $nx^2 \geq 0 \quad \text{ok!}$

$4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13.

1) $P(0)$ è vera $4^1 + 3^2$ è divisibile per 13? ok!

2) supponiamo $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ sia divisibile per 13.

Proviamo che lo è anche

$$4^{2n+3} + 3^{n+3}$$

$$\underline{4^{2n+3} + 3^{n+3}} = 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} =$$

$$= 16 \cdot \underbrace{(4^{2n+1} + 3^{n+2})}_{\substack{|| \\ 13 \cdot k \ (k \in \mathbb{N})}} - \underbrace{16 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2}}_{\substack{|| \\ -13 \cdot 3^{n+2}}} =$$

$$13 \left(\underbrace{16k - 3^{n+2}}_{|| \\ m \in \mathbb{N}} \right) \quad \text{fine}$$

