

Formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$P(n)$

Già provato con metodi di combinatoria, ora la proviamo per induzione

$n=0$ $(a+b)^0 \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 1 \end{matrix}$

 $\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$n=1$ $(a+b)^1 \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$

$a+b \stackrel{?}{=} \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$ OK.

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} \\ 1 & 1 \end{matrix}$

 $\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 1 & 1 & b \end{matrix}$

Passo induttivo. Supponendo vera $P(n)$ per un certo n , proviamo che vale $P(n+1)$

$(a+b)^{n+1} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ " per l'ip. induttiva

$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$

$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h$

$k+1=h$

cambio tipografico: h lo chiamo k

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&\stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Controlliamo che gli addendi corrispondenti coincidano

$$\boxed{k=0} \quad \binom{n}{0} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{0} \quad 1=1 \quad \text{OK!}$$

$$\boxed{k=n+1} \quad \binom{n}{n} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{n+1} \quad 1=1 \quad \text{OK!}$$

$$\boxed{k=1 \dots n} \quad \underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{\text{OK,}} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k} \quad \begin{array}{l} \text{proprietà vera} \\ \text{già provata in due modi} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Successioni definite per ricorrenza

Successioni definite come segue:

$$\begin{cases} a_0 \text{ assegnato} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

In questo modo da a_0 trovo a_1 , da a_1 trovo a_2 , e così via.

Esempio:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} ; a_1 = \frac{1}{4} ; a_2 = \frac{1}{16} , a_3 = \frac{1}{256} , \dots$$

$\{a_n\}$ così definita è costituita da numeri positivi, e si vede facilmente che è decrescente e infinitesima.

Questa succ^{te} si può scrivere in forma "chiusa", o esplicita;

$$a_0 = \frac{1}{2} , a_1 = \frac{1}{2^2} , a_2 = \frac{1}{2^4} , a_3 = \frac{1}{2^8} \quad , \text{ossia}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{2^n}}$$

Esempio: $\begin{cases} a_0 > 0 \quad \text{fissato} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$

$$a_1 = \frac{a_0}{1+a_0} ;$$

$$a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{\frac{a_0}{1+a_0}}{1+\frac{a_0}{1+a_0}} = \frac{a_0}{1+2a_0} = \frac{a_0}{1+2a_0}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1+a_2} = \frac{\frac{a_0}{1+2a_0}}{1+\frac{a_0}{1+2a_0}} = \frac{a_0}{1+3a_0}$$

:

$$a_n = \frac{a_0}{1+na_0} \rightarrow 0 \quad \text{decrescente}$$

Non sempre una succ^{te} ricorsiva si può scrivere in forma chiusa. Si può comunque cercare di capirne il comportamento?

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases} \quad a_1 = \sqrt{6+a_0} = \sqrt{7}$$

$$a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{7}}$$

$$a_3 = \sqrt{6+a_2} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}$$

Guardando i primi termini, la succ^{te} sembra crescente.

Proviamolo: $a_{n+1} \stackrel{?}{>} a_n$

$$\stackrel{||}{\sqrt{6+a_n}}$$

$$\sqrt{6+a_n} \stackrel{?}{>} a_n \Leftrightarrow 6+a_n \stackrel{?}{>} a_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a_n < +3$$

↑
vero!

$$\Leftrightarrow a_n < 3.$$

Il problema è diventato $a_n < 3$?

Vediamo di provarlo per induzione.

$$1 = a_0 < 3 \quad ? \quad \text{OK.}$$

Supponiamo $a_n < 3$. Posso dire che $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < 3$?

$$\sqrt{6+a_n} < 3 \Leftrightarrow 6+a_n < 9 \Leftrightarrow a_n < 3 \quad \text{OK}$$

Conclusione: $\{a_n\}$ è strett. crescente e $a_n < 3 \quad \forall n$.

Quindi $\{a_n\}$ ammette limite finito L .
Quanto vale L ?

$$\sqrt{6+a_n} = a_{n+1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\sqrt{6+L} \qquad L$$

$$\Rightarrow \sqrt{6+L} = L$$

$$\Downarrow$$

$$6+L = L^2$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$\cancel{L=-2} \quad (L=3)$$

Abbiamo provato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$