Teorema (De L'Hôpital) (Enunciato simile per $x \to b^-$)

f, g derivabili in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ t.c.

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $+\infty$ opp. $-\infty$)

2) $g'(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to a^+$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$.

Allora $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Dim nel caso $\left(\frac{0}{0}\right)$

1) $a > -\infty$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. Estendo le funzioni con continuità in $x = a$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ 0 & x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & x = a \end{cases}$$

continue in $[a,b)$

Fissiamo $x \in (a,b)$ e applichiamo il teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, x]$. $\to$ lo applico a $\tilde{f}, \tilde{g}$

Teor. di Cauchy: f, g continue in $[a, x]$, derivabili in (a, x)
$\Rightarrow \exists\, c \in (a, x)$ t.c. $f'(c)\,(g(x) - g(a)) = g'(c)\,(f(x) - f(a))$

se $g' \neq 0$ (che è vero se x è abbastanza vicino ad a).

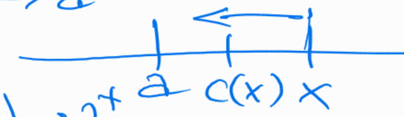
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{=0}{\tilde{f}(a)}}{g(x) - \underset{=0}{\tilde{g}(a)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

N.B. $c = c(x)$ dipende da x

$a < c(x) < x$

OSS Quando $x \to a^+$

anche $c(x) \to a^+$



$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} =$$

$y = c(x) \to a^+$

$$= \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$$

2) caso $a=-\infty$

Applico l'Hôpital nel caso già provato

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(-\frac{1}{t}\right)}{g\left(-\frac{1}{t}\right)}\ \stackrel{H}{=}$$

$t=-\frac{1}{x}\to0^+$

$x=-\frac{1}{t}$

ripasso a x

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(-\frac{1}{t}\right)\cancel{\frac{1}{t^2}}}{\underbrace{g'\left(-\frac{1}{t}\right)}_{\neq 0 \text{ se } t \text{ è abb. piccolo}}\cancel{\frac{1}{t^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

$\square$

Esercizio Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x\to0^+$, di

$f(x)=3\,\mathrm{tg}\,x-3x-x^2$

Significa: Trovare $\alpha>0$ t.c. $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3\,\mathrm{tg}\,x-3x-x^2}{x^\alpha}=\left(\frac{0}{0}\right)\stackrel{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{3}+3\,\mathrm{tg}^2x-\cancel{3}-2x}{\alpha x^{\alpha-1}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(\frac{3\,\mathrm{tg}^2x}{x}-2\right)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(-2+o(1))}{2x}=-1$$

$\frac{3\,\mathrm{tg}^2x}{x}\to0$

$\alpha-1=1$

$\alpha=2$

infinitesimo di ordine 2.

Stessa domanda per $f(x)=3\,\mathrm{tg}\,x-3x-x^3$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3\,\mathrm{tg}\,x-3x-x^3}{x^\alpha}\ \stackrel{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{3}+3\,\mathrm{tg}^2x-\cancel{3}-3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}=$$

$$=\frac{3}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{tg}^2x-x^2}{x^{\alpha-1}}\ \underset{\boxed{\alpha>1}}{=}\left(\frac{0}{0}\right)\stackrel{H}{=}\frac{3}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{2\,\mathrm{tg}\,x(1+\mathrm{tg}^2x)-2x}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$$

$$=\frac{6}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^3x-x}{x^{\alpha-2}}\ \underset{\boxed{\alpha>2}}{=}\left(\frac{0}{0}\right)\stackrel{H}{=}$$

$$= \frac{6}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} + tg^2 x + 3 tg^2 x (1+tg^2 x) - \cancel{1}}{(\alpha-2)\, x^{\alpha-3}} =$$

$$= \frac{6}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{4 tg^2 x + 3 tg^4 x}^{\sim 4x^2}}{x^{\alpha-3}} =$$

$\alpha - 3 = 2$

$\boxed{\alpha = 5}$

$$= \frac{6}{5\cdot 4\cdot 3} \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{x^2}}_{= 4} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Infinitesimo di ordine 5.

OSS 1 Non sempre l'Hopital è la cosa più conveniente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin^4(\sqrt{x})}^{\sim x^2}}{\underbrace{\log(1+3x)}_{\sim 3x} \underbrace{\sqrt{arctg\, x^2}}_{\sim x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{3}$$

OSS 2 Controllare di avere una f.i. $\left(\frac{0}{0}\right)$ oppure $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{3+x}{2+x}}_{= \frac{3}{2}} \cancel{\underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1}$$

OSS 3. La non esistenza di $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non implica

la non esistenza di $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \cancel{\underset{H}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos x}{1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (1 + \cos x) \nexists$$

Il vero risultato è

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$\to 0$

OSS 4 Il teorema di De L'Hôpital dice che, sotto certe ipotesi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ma non dice che $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ per $x \to x_0$

Esempio $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\cancel{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

ma $\dfrac{e^x}{x} \not\sim e^x$ per $x \to +\infty$

Applicazioni del teorema di De L'Hôpital (oltre al calcolo dei limiti)

1) Derivabilità di f in un punto "dubbio".

PROP Sia f continua in $[a,b)$, derivabile in (a,b). Se $\exists \lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora $f'_+(a) = l$.

Dim

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\to 0 \text{ perché } f \text{ continua in } a}}{\underbrace{x-a}_{\to 0}} \overset{\cancel{H}}{=} \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{1} = l \qquad \square$$

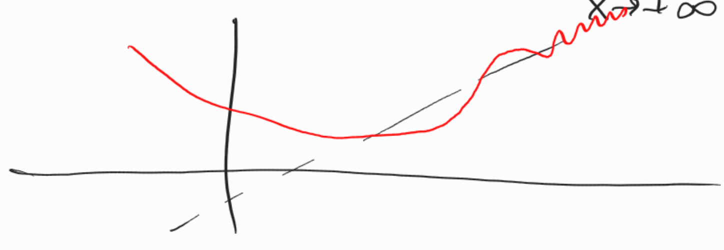
2) Calcolo del coeff^{te} angolare un asintoto obliquo.

PROP f derivabile in $(a,+\infty)$, supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$. Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

Dim.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = m \qquad \square$$

Attenzione: ci sono funzioni che ammettono asintoto obliquo per $x \to +\infty$ ma tali che $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ non esiste.



Esempio $f(x) = x + \frac{\operatorname{sen}(x^k)}{x}$ $k>0$

ha come asint. obliquo $y = x$

ma $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\cos x^k \cdot k x^k - \operatorname{sen}(x^k)}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{1}_{\downarrow} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^k)}{x^2}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{k\, x^{k-2}\cos(x^k)}\Big)$$ non ha limite se $k \geq 3$

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3 + x^2 + \log(1-x^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2 + 2x - \frac{2x}{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(\cos x - 1)}^{\sim -x^2/2}\overbrace{(1-x^2)}^{\to 1}}{3x^2(1-x^2) + 2x(1-x^2) - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2}{\underbrace{3x^2 - 3x^4 + \cancel{2x} - 2x^3 - \cancel{2x}}_{\sim 3x^2}} = -\frac{1}{6}$$

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile ∞ volte in (a,b). Sia $x_0 \in (a,b)$

(0) Qual è il polinomio di grado 0 (costante!) che "meglio approssima" $f(x)$ "vicino a x_0"? è $T_0(x) = f(x_0)$

E' la migliore approssimazione nel senso che

$$f(x) - T_0(x) = o(1) \qquad \text{per } x \to x_0$$

cioè $$f(x) - f(x_0) = o(1) \qquad ''$$

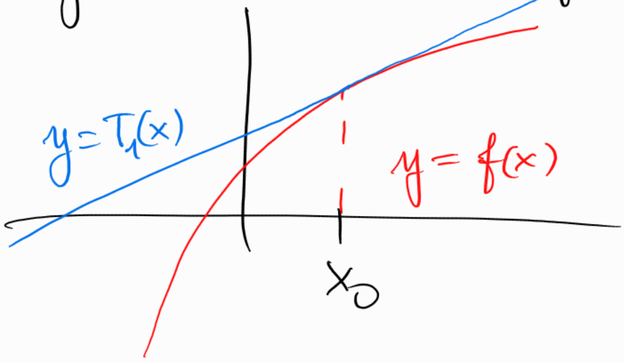
perché f è continua.

(1) Qual è il polinomio di grado ≤ 1 che "meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0"?

E' $T_1(x)= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, è migliori degli altri polinomi nel senso che

$$f(x)-T_1(x)=o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0.$$

ed è l'unico polinomio di grado ≤ 1 che verifica questa proprietà



(2) Qual è il polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0. Sto cercando un polinomio $T_2(x)$ t.c.

$$f(x)-T_2(x)=o\left((x-x_0)^2\right) \quad \text{per } x\to x_0$$

$$T_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overbrace{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-a_2(x-x_0)^2}^{\to f(x_0)-a_0}}{\underbrace{(x-x_0)^2}_{\to 0}} \quad (=0)$$

deve essere $\boxed{a_0=f(x_0)}$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a_1(x-x_0)-a_2(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\overbrace{f'(x)-a_1-2a_2(x-x_0)}^{\to f'(x_0)-a_1}}{\underbrace{2(x-x_0)}_{\to 0}} =$$

perché f' è continua (in quanto è derivabile)

Scelgo $\boxed{a_1=f'(x_0)}$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to x_0}\frac{\overbrace{f''(x)-2a_2}^{\to f''(x_0)-2a_2}}{2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f''(x_0)=2a_2$$

$$\Updownarrow$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

è l'unico polinomio di grado ≤ 2 t.c.

$$f(x) - T_2(x) = o\left((x-x_0)^2\right)$$

3) Stessa cosa: polinomio di grado 3 che meglio approx. $f(x)$ vicino a x_0. Cerco

$$T_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \quad \text{t.c.}$$

$$f(x) - T_3(x) = o\left((x-x_0)^3\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - a_2(x-x_0)^2 - a_3(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3} \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x-x_0) - 3a_3(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2} =$$

$$\boxed{a_1 = f'(x_0)}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2a_2 - 6a_3(x-x_0)}{6(x-x_0)} =$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x) - 6a_3}{6} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$