Abbiamo definito $\qquad n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,k} =$$

= numero dei sottoinsiemi non ordinati di k elementi presi da n elementi fissati.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$$

$$= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$= aaaa + \boxed{aaab} + \boxed{aaba} + \boxed{aabb} +$$
$$+ \boxed{abaa} + \boxed{abab} + \boxed{abba} + \boxed{abbb} +$$
$$+ \boxed{baaa} + \boxed{baab} + \boxed{baba} + \boxed{babb} +$$
$$+ \boxed{bbaa} + \boxed{bbab} + \boxed{bbba} + bbbb.$$

Quanti termini con 4 a? $\quad$ 1

Quanti termini con 3a e 1b? ← corrisponde a: "In quanti modi posso scegliere una di quattro caratteri e farlo diventare b?" $\binom{4}{1} = 4$

" " " 2a e 2b?

" " " 1a e 3b?

" " " 4b ?

Generalizzando questo ad $(a+b)^n$ si prova che

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

I coeff.ti di questo polinomio formano le righe del cosiddetto triangolo di Tartaglia

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$$

$$\boxed{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\overset{?}{=}\binom{n+1}{k}}$$

$$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k-1)!}\,(n-k+1)\cancel{!}}+\frac{\cancel{n!}}{\underset{k}{\cancel{k!}}\,\cancel{(n-k)!}}=\frac{(n+1)\cancel{!}}{\underset{k}{\cancel{k!}}\,(n-k+1)\cancel{!}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}}_{\dfrac{\cancel{k}+n\overset{\shortparallel}{-}\cancel{k}+1}{k(n-k+1)}}=\frac{n+1}{k(n-k+1)}$$

$\binom{n+1}{k}$ = numero dei sottoinsiemi non ordinati di k elementi su $n+1$ dati.

Sia A un elemento fissato degli $n+1$.

I sottoinsiemi di k elementi si dividono in:

quelli che contengono A: sono $\binom{n}{k-1}$

quelli che non contengono A: $\binom{n}{k}$

$$\Rightarrow \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}}$$

$$(a+b+c)^{50} = a^{50} + 50a^{49}b + 50a^{49}c + \dots$$

$$\dots + \text{coeff}^{te}\, a^4 b^{31} c^{15}$$

Faccio i prodotti come prima, senza sommarli e senza scambiare l'ordine. Ottengo 3^{50} monomi. Quanti di questi contengono esattamente $4a$, $31b$ e $15c$?
Prima ne scelgo 4 su 50: le a
Poi sui rimanenti 46 ne scelgo 31: le b.

$$\text{coeff}^{te} = \binom{50}{4}\cdot\binom{46}{31} = \frac{50!}{4!\,\cancel{46!}}\cdot\frac{\cancel{46!}}{31!\,15!} = \frac{50!}{4!\,31!\,15!}$$

coeff^{te} multinomiale

$$\binom{50}{4,31,15}$$

$$\boxed{(a+b+c)^{50} = \sum_{k+h+l=50} \binom{50}{k,h,l} a^k b^h c^l}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\ n-k}$$

Il coeff^te multinomiale $\binom{n}{k,h,l}$ dove tutti sono interi t.c. $k+h+l=n$

rappresenta il numero di modi in cui posso mettere n elementi distinti in 3 cassetti in modo che

nel primo cassetto ce ne siano k

" secondo " " " h

terzo l