Permutazioni di n elementi = ordinamenti di n elementi

\# permutaz. di n elem $= P_n = n!$

Disposizioni di k elementi su n = sottoinsieme ordinati di k elementi presi da n fissati.

\# disp. di k elementi su n $= D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$D_{n,n} = P_n$ $\qquad D_{n,n} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n! = P_n$. $\quad 0! = 1$

Combinazione di k elementi su n (oppure comb. di n elementi presi k per volta)

= sottoinsieme non ordinato di k elementi presi da n fissati

$k \le n$

\# comb. di k elementi su n $=: C_{n,k} = D_{n,k}/k! =$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =: \binom{n}{k}$$

Esempio Voglio estrarre da 100 studenti un gruppo di 10 studenti. Quante sono le scelte possibili?

Il numero di disposizioni (tenendo conto dell'ordine) sarebbe

$$D_{100,10} = 100\cdot 99\cdot 98\cdot \ldots \cdot 91 = \frac{100!}{90!}$$

A ogni combinazione corrispondono 10! disposizioni (che sono i modi diversi in cui posso ordinare i 10 studenti

\# comb. di 10 elementi su 100 $= C_{100,10} = \dfrac{D_{100,10}}{10!} =$

$$= \frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 91}{10!} = \frac{100!}{90!\,10!} =: \binom{100}{10}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!}$$

<u>OSS</u> $$D_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{(n-0)!}} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{\cancel{1!}\,(n-1)!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)}\cdots\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cdots\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = n = \binom{n}{n-1}$$

Nel poker (5 card draw) a ogni giocatore vengono distribuite 5 carte prese da un mazzo di 4 semi di 8 valori 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. (un mazzo di 32 carte)

Quante sono le "mani" di 5 carte possibili?

$$C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32\cdot 31\cdot \cancel{30}\cdot 29\cdot \overset{7}{\cancel{28}}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \underline{201\,376}$$

<u>1° domanda</u> Qual è la probabilità di avere un poker servito? (per esempio, 4 K + un 8).

$$\underset{\text{valore del poker}}{8} \cdot \underset{\text{scelta dei semi del poker}}{1} \cdot 28 = 224.$$

$$\text{Prob. (poker servito)} = \frac{224}{201.376} \approx 0{,}1\ \%$$

---

2) Probabilità di ricevere un full servito (per es. tre K e due 10)

$$8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 7 \cdot \binom{4}{2} =$$

valori del tris

modi di estrarre 3 carte del valore scelto

valore della coppia

modi di estrarre 2 carte del valore scelto

$$= 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \underbrace{\frac{4 \cdot 3}{2}}_{= 6} = 1344$$

$$\text{Prob. (full servito)} = \frac{1344}{201.000} \simeq 0{,}67\%$$

---

3) Prob. di ricevere un "tris" servito (tre carte dello stesso valore) e basta (cioè non full, non poker)

Mani "vincenti"

$$8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 28 \cdot 24 \quad \frac{1}{2} = 8 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 12 = 10752$$

valori del tris

modi di scegliere 3 carte del valore fissato

4ª carta

5ª carta

non conta l'ordine di 4ª e 5ª carta.

K K K 8♡ 10♣

10♣ 8♡

$$\text{Prob (tris servito "e basta")} = \frac{10752}{200000} \approx 5\%$$

Prob. coppia servita $\left(\begin{matrix} \text{per es.} \\ K, K, A, 10, 8\end{matrix}\right)$

estr. della 3^a carta

$$8 \binom{4}{2} \cdot 28 \cdot 24 \cdot 20 \ \frac{1}{3!}$$

valore della coppia

modi di scegliere 2 carte del valore fissato.

$\binom{n}{k}$ si dicono anche coeff.ti binomiali.

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \underset{\binom{4}{0}}{\underset{\parallel}{1}} \cdot a^4 + \underset{\binom{4}{1}}{\underset{\parallel}{4}} a^3b + \underset{\binom{4}{2}}{\underset{\parallel}{6}} a^2b^2 + \underset{\binom{4}{3}}{\underset{\parallel}{4}} ab^3 + \underset{\binom{4}{4}}{} b^4$$

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^7 + \underset{\binom{7}{1}}{\underset{\parallel}{7}} a^6 b + \underset{\binom{7}{2}}{\underset{\parallel}{21}} a^5 b^2 + \underset{\binom{7}{3}}{35} a^4 b^3 + 35 a^3 b^4 + 21 a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

$$\frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3!}}$$