Derivata seconda di f.

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

se il limite esiste finito.

$f(x) = x^{5/3}$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3}$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

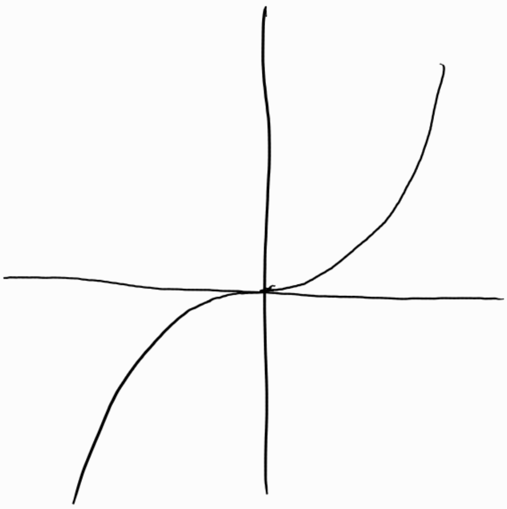
$f''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{10}{9} x^{-1/3}$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Per $x_0 = 0$? $\cancel{f''(0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - \overset{=0}{f'(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{5}{3} h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{3h^{1/3}}$

$\nexists$

$f''_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} = +\infty$

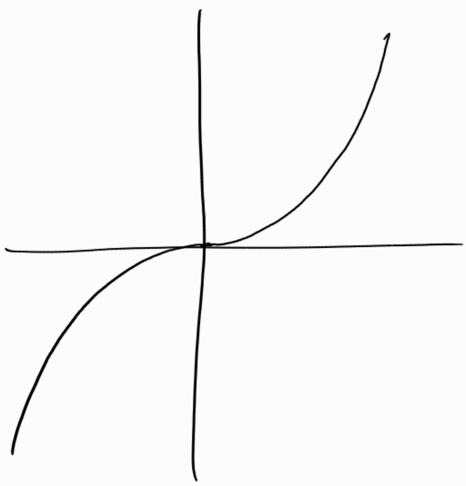
$f''_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \text{———} = -\infty$



$f(x) = x|x|$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2|x|$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{sign} x & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Derivata n-esima di f in x

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$ se questo limite esiste finito

1) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f''(x)=e^x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\dots \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x \ \forall x\in\mathbb{R}.$

2) $f(x)=2^x \Rightarrow f'(x)=(\log 2)\, 2^x, \quad f''(x)=(\log 2)^2\, 2^x$

$\dots \Rightarrow f^{(n)}(x)=(\log 2)^n\, 2^x$

3) $f(x)=\log(1+x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad \forall x>-1.$

dom $f=(-1,+\infty)$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x)=\dfrac{-6}{(1+x)^4}$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad \forall x>-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Derivata n-esima di un prodotto

$(fg)' = f'g+fg'$

$(fg)'' = f''g+f'g'+f'g'+fg'' = f''g+2f'g'+fg''$

$(fg)''' = f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$

$(fg)^{(4)} = f^{(4)}g+4f'''g'+6f''g''+4f'g'''+fg^{(4)}$

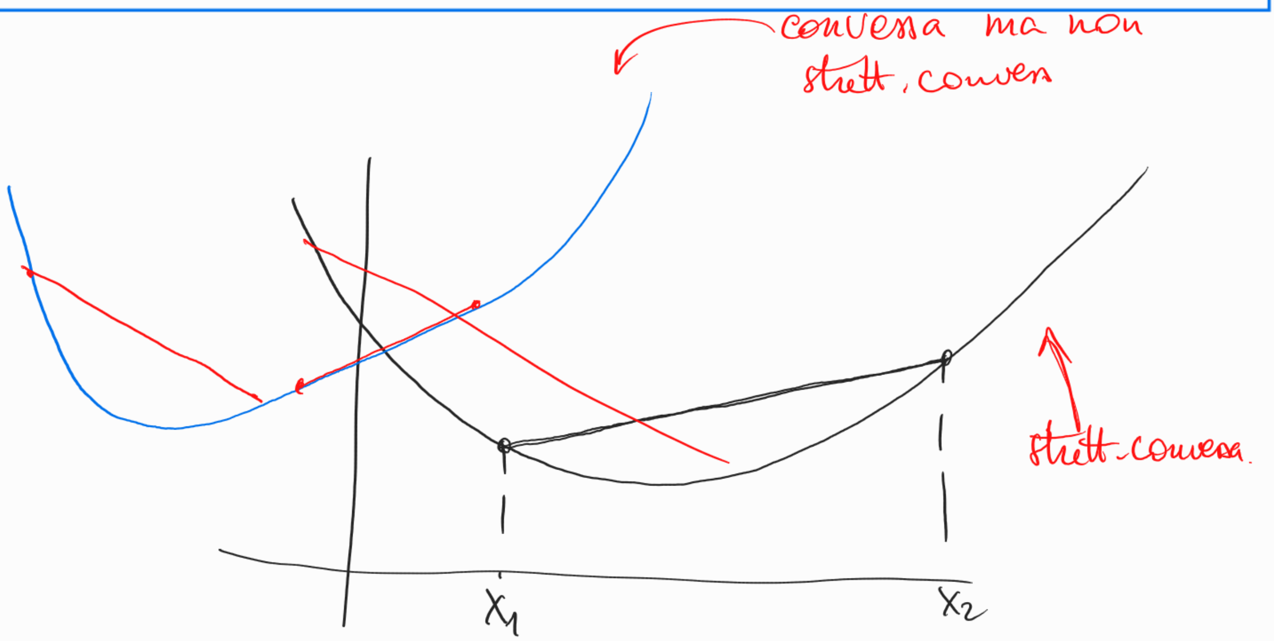
$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)}}$$ formula di Leibniz

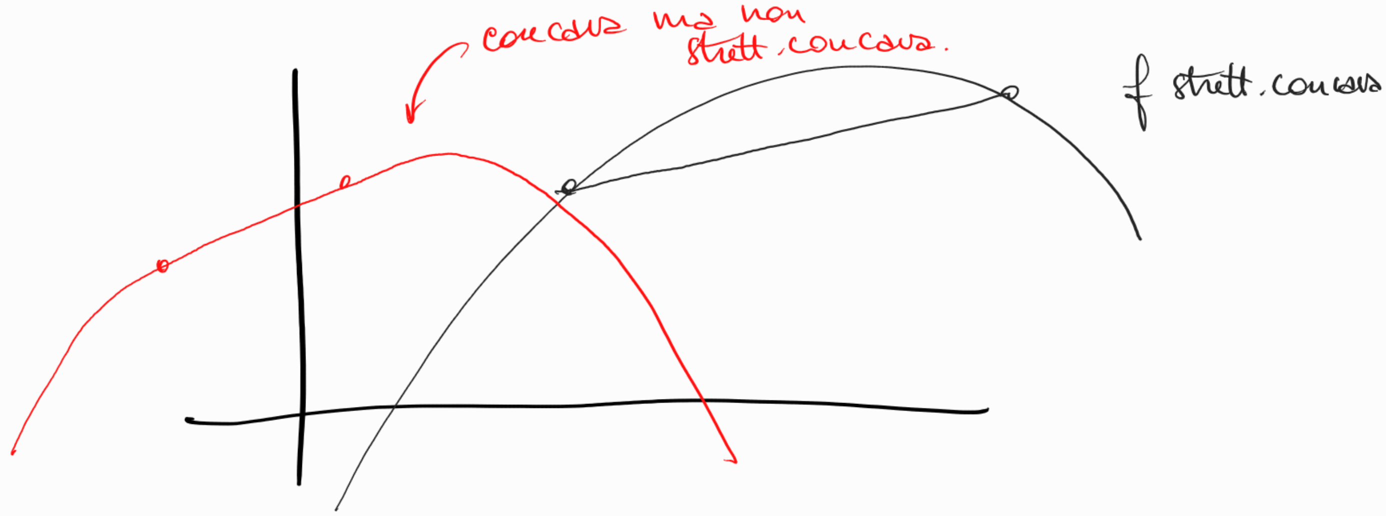
Convessità e concavità di una funzione

DEF Sia $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo)

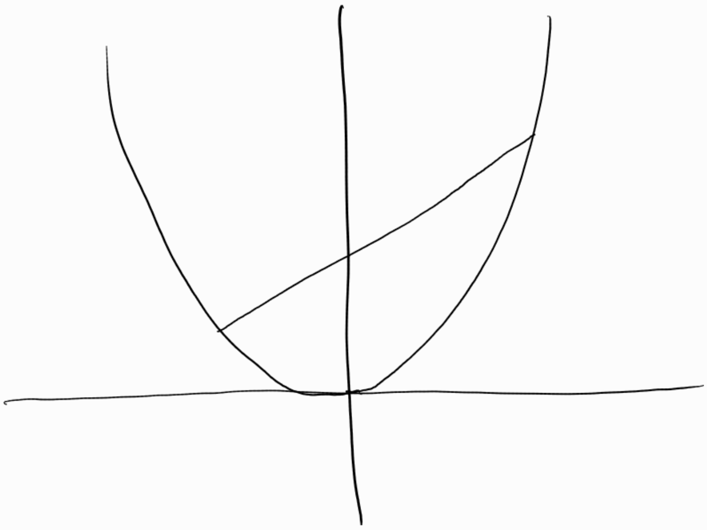
f si dice **convessa in I** se, comunque presi due punti distinti
concava in I
$x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$
giace non al di sotto del grafico di f.
non al di sopra

f si dice **strettamente convessa in I** se il segmento giace
strettamente al di sopra del grafico di f, eccetto agli estremi.
al di sotto

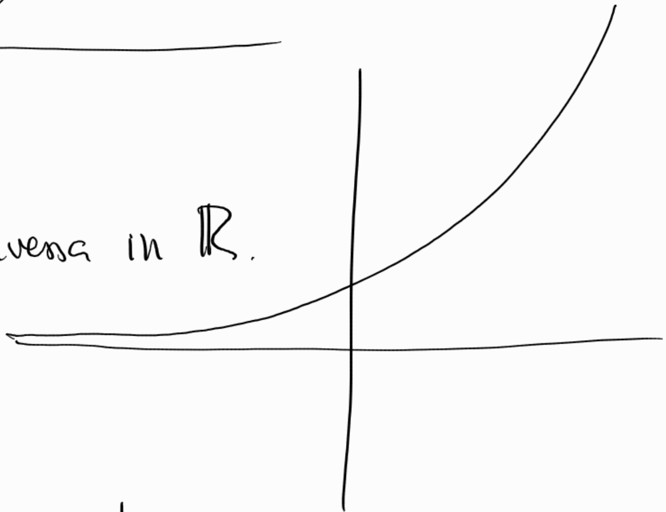




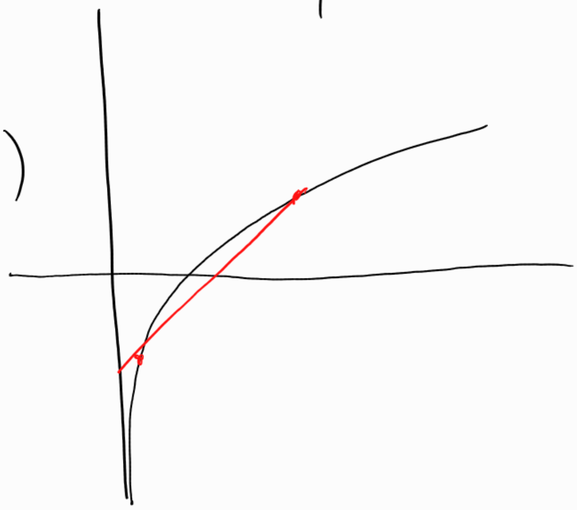
Esempi: $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^4$ sono f^{ni} strett. convesse in $\mathbb{R}$.



$f(x) = e^x$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.



$f(x) = \log x$
è strett. concava in $(0, +\infty)$



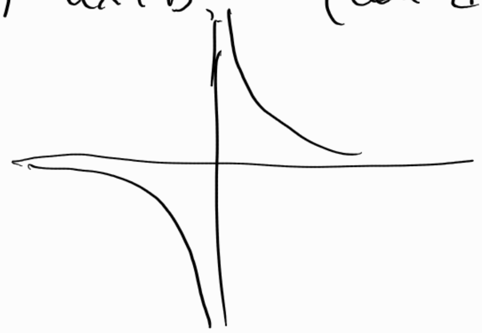
$f(x) = -x^2$ è strett. concava.

OSS f è (strett) convessa $\Longleftrightarrow$ $-f$ è (strett) concava

Le uniche funzioni contemporaneamente concave e convesse sono le funzioni $f(x) = ax+b$, (con $a, b \in \mathbb{R}$)

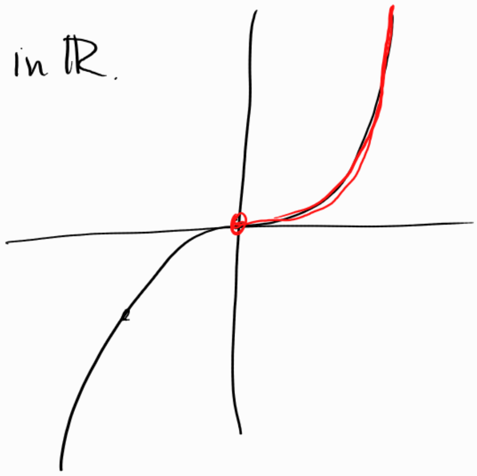
$f(x) = \frac{1}{x}$ è:

$\begin{cases} \text{strett convessa in } (0, +\infty) \\ \text{strett. concava in } (-\infty, 0) \end{cases}$

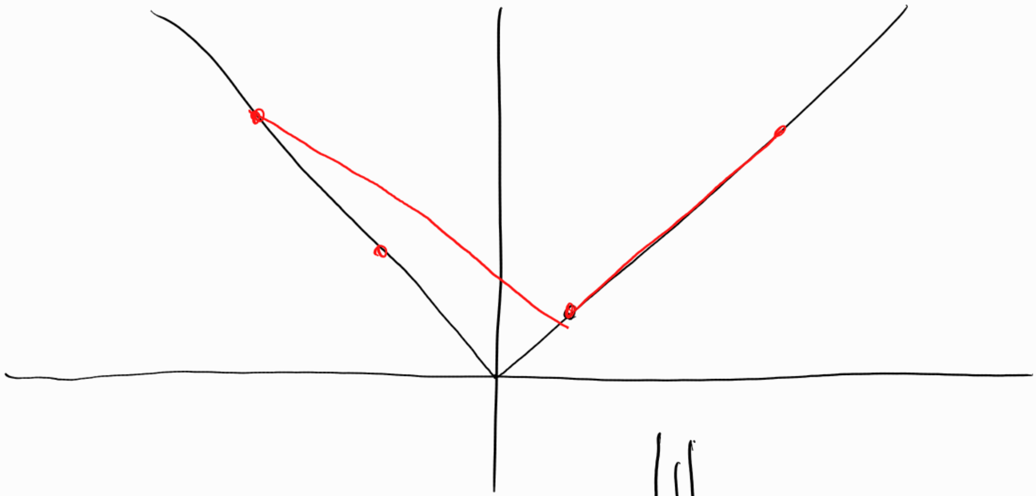


$f(x) = x^3$ non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^3$ è $\begin{cases} \text{strett. convessa in } [0,+\infty) \\ \text{strett. concava in } (-\infty,0] \end{cases}$



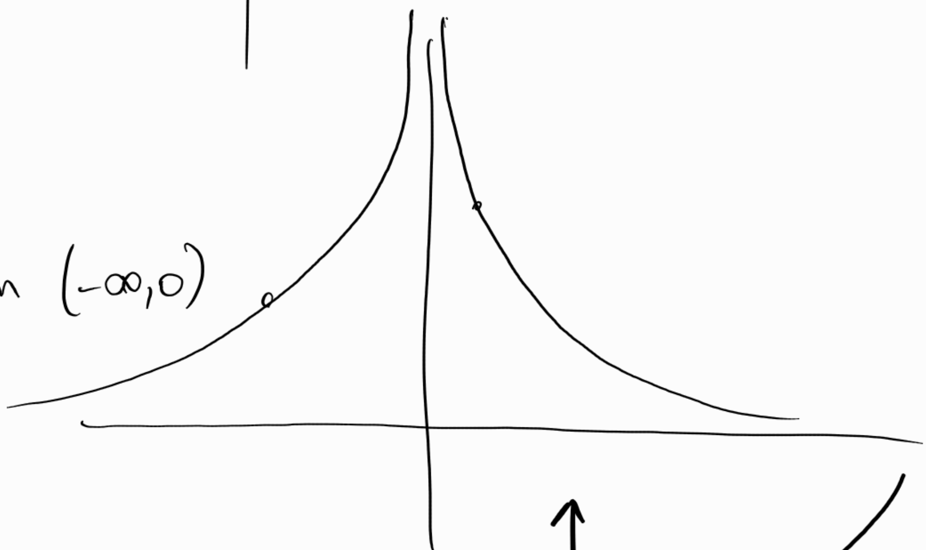
$f(x) = |x|$ è convessa (ma non strett.) in $\mathbb{R}$

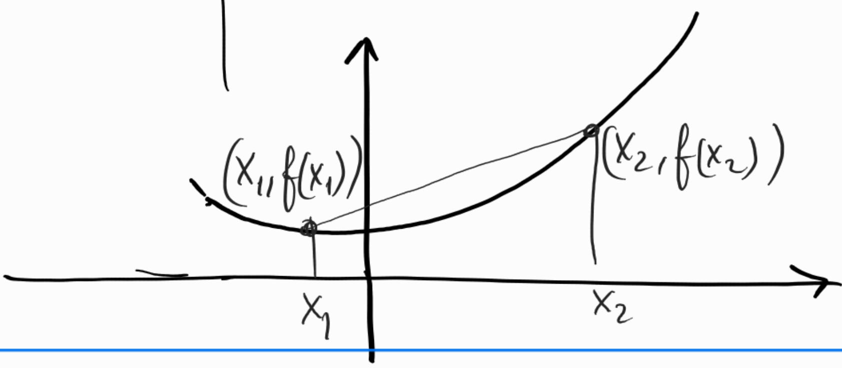


$f(x) = \frac{1}{x^2}$

è strett. convessa in $(-\infty,0)$

e in $(0,+\infty)$





DEF analitica di concavità / convessità.

$f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se $\forall x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \forall x \in (x_1, x_2) \quad (*)$$

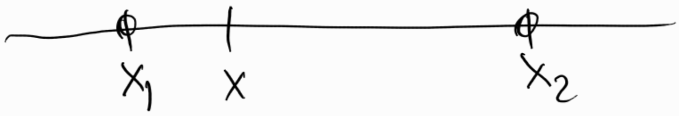
f è strett. convessa se in $(*)$ vale il $<$
f è concava se in $(*)$ vale il $\geq$
f è strett. concava se in $(*)$ vale il $>$.

Retta passante per $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

<u>OSS</u> Il generico punto $x \in (x_1, x_2)$ lo posso scrivere così:

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \qquad \text{con } t \in (0,1)$$
$$= (1-t)x_1 + t x_2 \qquad \text{con } t \in (0,1)$$



Se questa espressione la sostituisco nella $(*)$ ottengo

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2) \quad \forall t \in (0,1)$$

Riformuliamo la def^{ne}

<u>Def. analitica di convessità/concavità (2)</u>

$f: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>convessa</u> in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 \neq x_2$

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2) \quad \forall t \in (0,1) \quad (**)$$

f si dice strett. convessa se vale "$<$" nella $(**)$
concava " "$\geq$" "
strett. concava " "$>$" "

Proviamo a utilizzare questa def^{ne} per provare che $f(x)=x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.

Devo provare che $\forall x_1 \neq x_2$, $\forall t \in (0,1)$ si ha

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \overset{?}{<} (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

$$((1-t)x_1 + t x_2)^2 \overset{?}{<} (1-t)\, x_1^2 + t\, x_2^2$$

$$(1-t)^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2 \overset{?}{<} (1-t)x_1^2 + t x_2^2$$

$$\underbrace{\left[(1-t)^2 - (1-t)\right]} x_1^2 + (t^2 - t) x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2 \overset{?}{<} 0$$

$$\cancel{(1-t)(1-t-1)}$$

$$-t(1-t)x_1^2 - t(1-t)x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2 \overset{?}{<} 0$$

dividendo per $t(1-t)>0$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \overset{?}{<} 0$$

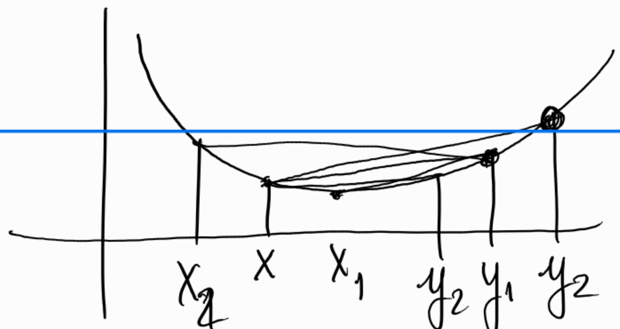
$$-(x_1 - x_2)^2 \overset{?}{<} 0 \qquad \text{vero perché } x_1 \neq x_2.$$

In sostanza, il controllo della convessità usando la def^{ni} è molto laborioso.

Proprietà delle f. convesse

PROP. $f: I \to \mathbb{R}$

f è (strett.) convessa $\iff$ $P(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ è (strett.) crescente come funzione della x e della y.



Teorema (Regolarità delle funzioni convesse).

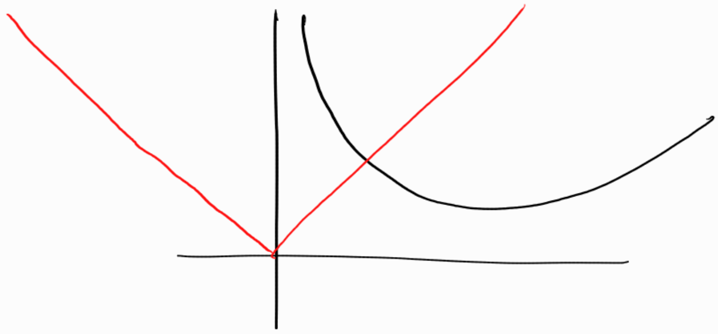
Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa in (a,b). Allora:

(i) $\forall x\in(a,b)$ esistono finite $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$

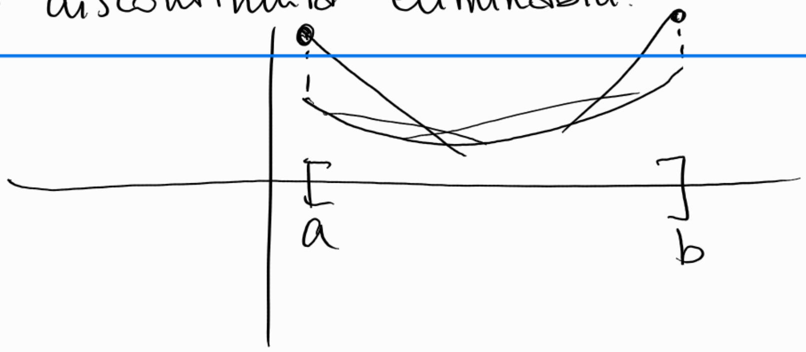
(ii) $f'_-(x)\leq f'_+(x)$

(iii) Le funzioni $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ sono funzioni crescenti in (a,b)

(iv) f è continua in (a,b)



OSS 1. Segue dal teorema una funzione convessa in I intervallo è continua all'interno dell'intervallo, e può avere negli estremi solo discontinuità eliminabili.



OSS 2 Gli unici pti interni in cui f convessa non è derivabile sono pti angolosi.

Dim i) Sappiamo che $P(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

è crescente sia rispetto alla x che alla y.

$$\Rightarrow f'_-(x)=\lim_{y\to x^-}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ \exists \text{ finito}$$

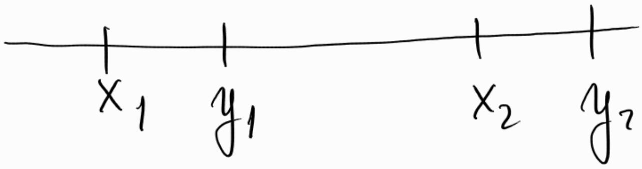
$$f'_+(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad \exists \text{ finito}$$

dim ii) $f'_-(x) \overset{?}{\leq} f'_+(x)$

$$f'_-(x) = \lim_{y \to x^-} P(x,y) \leq \lim_{y \to x^+} P(x,y) = f'_+(x)$$

Dim iii) $f'_+(x)$ crescente.

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2)$$



$$\underbrace{P(x_1,y_1)}_{\downarrow\, y_1 \to x_1^+} \leq P(x_2,y_2)$$

$$f'_+(x_1) \leq \underbrace{P(x_2,y_2)}_{\downarrow\, y_2 \to x_2^+} \quad \text{per la perm. del segno.}$$

$$f'_+(x_2)$$

$$f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2) \qquad \text{perm. del segno.}$$

(iv) f derivabile in x da destra $\Rightarrow$ f continua in x da destra
f " " " " sinistra $\Rightarrow$ f " " da sinistra

$\Downarrow$

f continua.