Scomporre il polinomio x^4+16. (non ammette radici reali)

sappiamo che si deve scomporre come prodotto di due polinomi di grado 2 irriducibili nei reali.

$$x^4+16 = (x^4+16+8x^2)-8x^2 = (x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2 =$$

$[A^2-B^2=(A-B)(A+B)]$

$$= (x^2+4-2\sqrt{2}x)(x^2+4+2\sqrt{2}x)$$

$$\Delta = 8-16<0$$

Utile per calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{x^4+16}$$

Stessa cosa per x^6+1: deve scomporsi nel prodotto di 3 polinomi di 2° grado irriducibili nei reali.

$$x^6+1 = (x^2)^3+1^3 =$$

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$= \underbrace{(x^2+1)}_{\text{irriducibile}}(x^4-x^2+1) =$$

$$= (x^2+1)((x^4+1+2x^2)-3x^2) =$$

$$= (x^2+1)((x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2)$$

$$= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$$

Serve per calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{x^6+1}dx$$

Studiare il segno di $f(x) = \dfrac{x^3+8}{3x^4-7x^3+5x^2-7x+2} =$

$$x^3+8 = (x+2)\underbrace{(x^2-2x+4)}_{\text{irriducibile}}$$

$$= \frac{(x+2)\overbrace{(x^2-2x+4)}^{>0}}{(x-2)(3x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{>0}}$$

$$3x^4-7x^3+5x^2-7x+2 =$$

$$=(x-2)(3x^3-x^2+3x-1)$$

$$=(x-2)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{irriducibile}}(3x-1)$$

$x=2$ è radice

$3\cdot 16-7\cdot 8+5\cdot 4-7\cdot 2+2=$

$=48-56+20-14+2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & -7 & 5 & -7 & 2 \\ 2 & & 6 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 3 & -1 & / \end{array}$$

Elementi di Calcolo Combinatorio

Permutazione di n elementi = un modo di disporre in ordine n elementi distinti tra loro.

Esempio. Quante parole distinte posso formare usando 1 solamente le 5 vocali 1 volta sola: AOIUE, OUAEI, etc...

5 possibilità per la 1ª vocale
4 possibilità " " 2ª "
3 " " " 3ª "
2 " " " 4ª "
1 " " " 5ª "

Numero delle permutazioni di 5 elementi è

$$P_5 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5! = 120$$

Esempio: In una finale dei 100 m. piani (8 corridori) quanti sono i possibili ordini di arrivo?

$$P_8 = 8! \simeq 40.000$$

In generale $P_n = n!$

Quanti sono i possibili anagrammi della parola MATEMATICA?

Verrebbe da dire $P_{10} = 10!$ ma questo è scorretto perché le lettere non sono tutte distinte.

Rendiamo le lettere distinte tra loro: $M_1 A_1 T_1 E M_2 A_2 T_2 I C A_3$

Faccio gli anagrammi: sono $P_{10} = 10!$

Osserviamo che però nel problema originale queste 10! permutazioni non generano anagrammi diversi

per es. $A_1 T_2 M_1 M_2 T_1 A_2 A_3 C I E$

e $A_2 T_1 M_1 M_2 T_2 A_3 A_1 C I E$

Quante di queste permutazioni corrispondono a uno stesso anagramma?

Posso permutare le T in $P_2 = 2! = 2$ modi

" " " M in $P_2 = 2! = 2$ modi

" " " A in $P_3 = 3! = 6$ modi.

Numero degli anagrammi è $\dfrac{P_{10}}{P_2 \cdot P_2 \cdot P_3} = \dfrac{10!}{2!\,2!\,3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cancel{3} \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6}}$

Numero degli anagrammi di ANAGRAMMA.

9 lettere, tutte diverse tranne A (sono 4) e M (sono 2).

Numero degli anagrammi $= \dfrac{P_9}{P_2 P_4} = \dfrac{9!}{2 \cdot 4!} = ---$

Disposizione di k elementi su n (oppure: di n elementi presi k per volta). ($k \leq n$)

E' un sottoinsieme ordinato di k elementi presi da n elementi fissati distinti.

ESEMPIO Prese di nuovo le 5 vocali AEIOU, quante parole di 3 lettere non ripetute posso scrivere?

Estraggo la prima lettera: 5 possibilità

" " seconda " : 4 "

" " terza " : 3 possibilità

Numero di parole = numero di disposizioni di 3 elementi su 5 =

$$= D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

In generale il numero di disposizioni di k elementi su n è dato da

$$\boxed{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)}\cancel{\dots 1}}{\cancel{(n-k)!}}$$

Stessa corsa dei 100 m, 8 atleti.

In quanti modi posso distribuire 3 medaglie di oro, argento e bronzo.

$$D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!}$$