Divisione di polinomi

Siano

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

dove $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

dove $b_0, b_1, \dots b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$ $\boxed{m \leq n}$

Vogliamo definire la divisione di $P_n(x)$ (dividendo) per $Q_m(x)$ (divisore). Questo significa trovare due polinomi $S_k(x)$ (quoziente) e $R_h(x)$ (resto) t.c

$$P_n(x) = Q_m(x) S_k(x) + R_h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

con $\boxed{h < m}$

OSS affinché siano dello stesso grado deve essere $k = n - m$

$\boxed{\text{Se } R_h(x) \equiv 0 \text{, diremo che } P_n(x) \text{ è divisibile per } Q_m(x).}$

TEOREMA Dati $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ con $n \geq m$, esiste un'unica coppia di polinomi $S_k(x)$ e $R_h(x)$, con $h < m$, t.c. valga $(*)$.

La dim. "coincide" con l'algoritmo per la divisione.

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15, \quad Q_2(x) = x^2 - 1$$

Significa trovare un polinomio $S_2(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ e un polinomio $R_1(x) = d_1 x + d_2$. t.c.

$$x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15 \equiv (x^2 - 1)(\cancel{c_2} x^2 + \cancel{c_1}^{\,2} x + \cancel{c_0}^{\,-13}) + \cancel{d_1}^{\,4} x + d_2.$$

$+13$

Devo eguagliare i coeff^{ti} dei polinomi grado 4 : $\boxed{1 = c_2}$

grado 3 : $\boxed{2 = c_1}$

grado 2: $-14 = c_0 - 1 \Rightarrow \boxed{c_0 = -13}$

grado 1 : $2 = -2 + d_1 \Rightarrow \boxed{d_1 = 4}$

grado 0 : $-15 = 13 + d_2 \Rightarrow \boxed{d_2 = -28}$

Questi calcoli sono esattamente quelli che si fanno con il noto algoritmo della divisione

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & -14x^2 & +2x & -15 & x^2-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & +x^2 & & & x^2+2x-13 \quad S_2(x) \\ \cline{1-5}
/ & 2x^3 & -13x^2 & +2x & -15 & \\
 & -2x^3 & & +2x & & \\ \cline{2-5}
 & / & -13x^2 & +4x & -15 & \\
 & & 13x^2 & & -13 & \\ \cline{3-5}
 & & / & 4x & -28 & R_1(x)
\end{array}
$$

Caso particolare : Quando $Q_m(x) = Q_1(x) = x - a$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & & +x & -7 & x-4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +4x^3 & & & & x^3+x^2+4x+17 \\ \cline{1-5}
/ & x^3 & & +x & -7 & S_3(x) \\
 & -x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & / & 4x^2 & +x & -7 & \\
 & & -4x^2 & +16x & & \\ \cline{3-5}
 & & / & 17x & -7 & \\
 & & & -17x & +68 & \\ \cline{4-5}
 & & & / & 61 = R_0(x) &
\end{array}
$$

Di solito in questo caso si usa una forma graficamente diversa

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 4 & & 4 & 4 & 16 & 68 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 17 & 61 \end{array} \longrightarrow R_0$$

coeff. di $S_3(x) = x^3 + x^2 + 4x + 17$

Regola di Ruffini per la divisibilità per $(x-a)$

Un polinomio $P_n(x)$ è divisibile per $(x-a) \iff a$ è uno zero del polinomio

cioè $P_n(x) = (x-a)S_{n-1}(x)$ (cioè $P_n(a)=0$)

$\boxed{\Rightarrow}$ ovvia

$\boxed{\Leftarrow}$ Faccio la divisione di $P_n(x)$ per $(x-a)$

$$P_n(x) = (x-a)\,S_{n-1}(x) + R_0$$

Impongo $P_n(a)=0$

$$0 = P_n(a) = R_0$$, quindi $P_n(x)$ è divisibile per $x-a$. $\square$

In generale prendendo $P_n(a)$ si ottiene R_0, cioè il resto della divisione di $P_n(x)$ per $x-a$.

Fattorizzazione dei polinomi.

Teorema fondamentale dell'algebra per polinomi reali

Ogni polinomio $P_n(x)$ a coeff^{ti} reali si può scomporre nel prodotto di polinomi di grado 1 e di polinomi di grado 2 irriducibili nei reali (polin. di grado 2 con $\Delta<0$)

Un polinomio di grado 3, per esempio, si può scomporre in:

- 3 polinomi di grado 1.
- 1 polinomio di grado 1 e uno irriducibile di grado 2.

<u>Esempio:</u> Fattorizziamo $P_3(x) = x^3+3x^2-25x+21$.

Sicuramente avrà un fattore del tipo $(x-a)$

$$P_3(x) = (x-a)(x^2+bx+c) \qquad -ac = \underline{21}$$

Questo suggerisce di cercare a tra i fattori di 21.

$\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$

$P_3(1) = 1+3-25+21 = 0$ $\qquad x=1$ è sol^{ne}

Divisione per $x-1$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & -25 & 21 \\
1 & & 1 & 4 & -21 \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{4} & \underline{-21} & /
\end{array}$$

$$P_3(x) = (x-1)(x^2+4x-21)$$
$$(x-1)(x+7)(x-3)$$