Date le seguenti funzioni: $f(x)$,

1) Trovarne il dominio
2) Dire se sono suriettive su $\mathbb{R}$, in caso contrario trovarne l'immagine
3) Dire se sono iniettive. In caso contrario, restringerne il dominio in modo da renderle iniettive (conservando l'immagine)
4) scrivere (se possibile) l'espressione di f^{-1} così ottenuta e disegnarne il grafico.

$$f(x) = 3x^5 - 2$$

1) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.
2) $\text{im } f = \mathbb{R}$. Infatti f è continua in $\mathbb{R}$ intervallo $\Rightarrow$ f assume tutti i valori compresi tra $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$.

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 2) = +\infty \quad \Rightarrow \sup f = +\infty$$

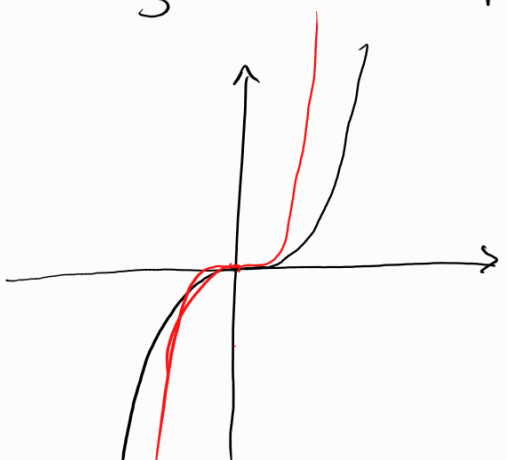
$$\lim_{x \to -\infty} (3x^5 - 2) = -\infty \quad \Rightarrow \inf f = -\infty$$

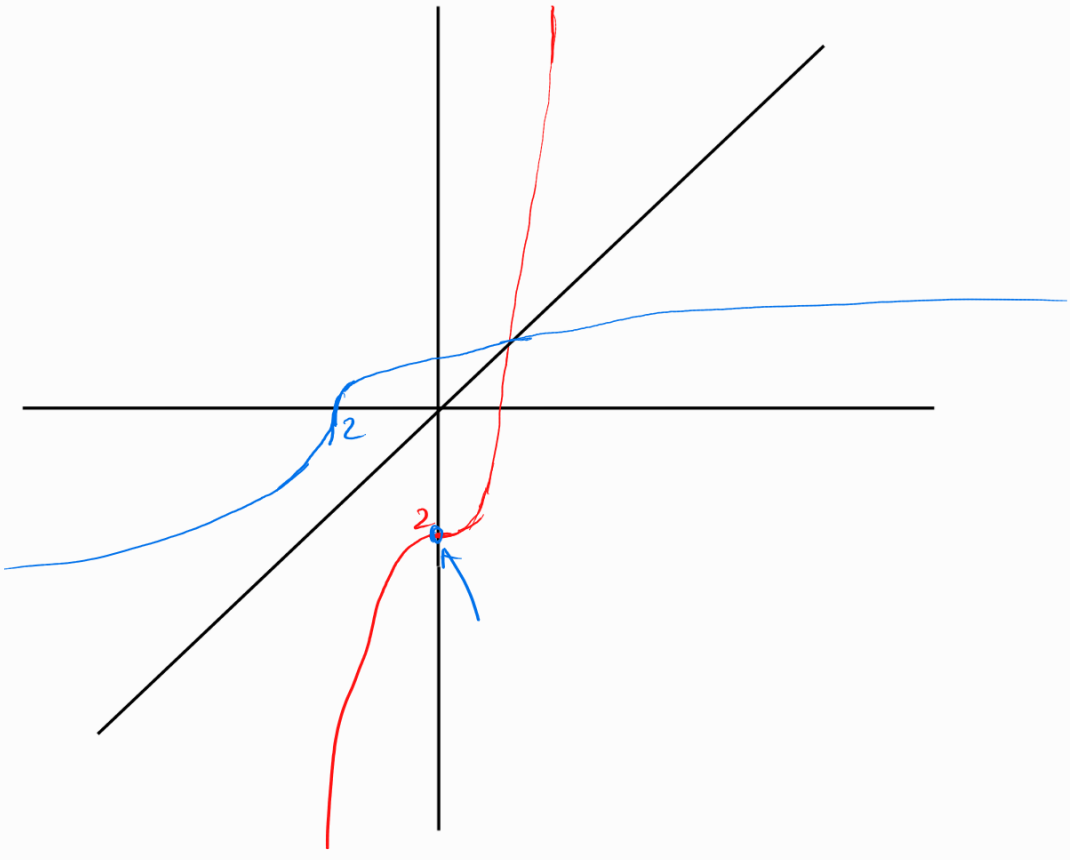
3) f è iniettiva? sì perché è strett. crescente
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biiettiva $\Rightarrow \exists\, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Fisso $y \in \mathbb{R}$, cerco x t.c. $f(x) = y$

$$3x^5 - 2 = y \iff x^5 = \frac{y+2}{3} \iff x = \sqrt[5]{\frac{y+2}{3}}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[5]{\frac{y+2}{3}}$$





$y = f(x) = 3x^5 - 2$

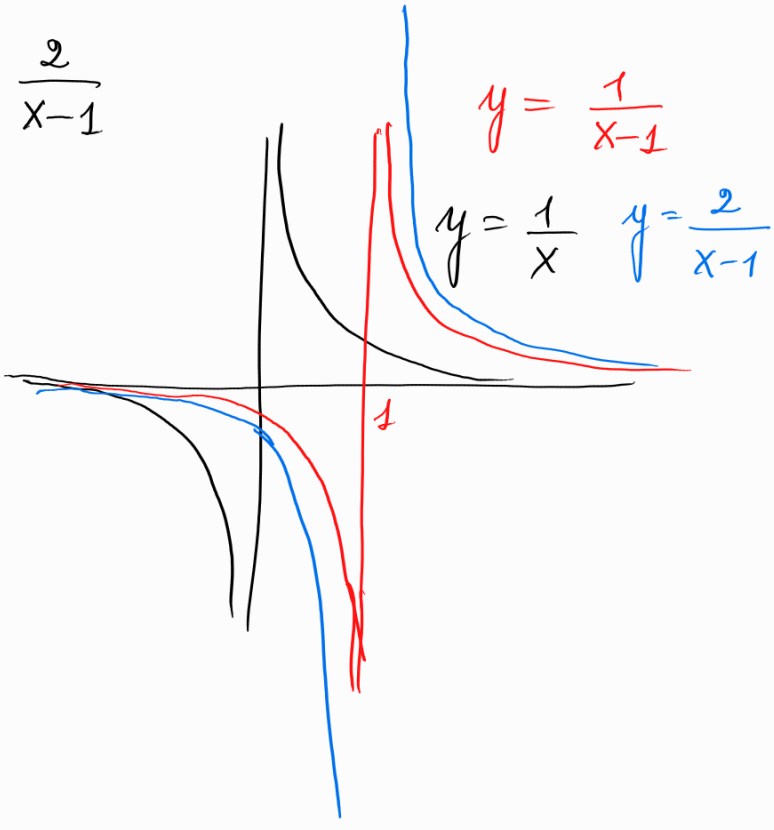
$y = f^{-1}(x)$

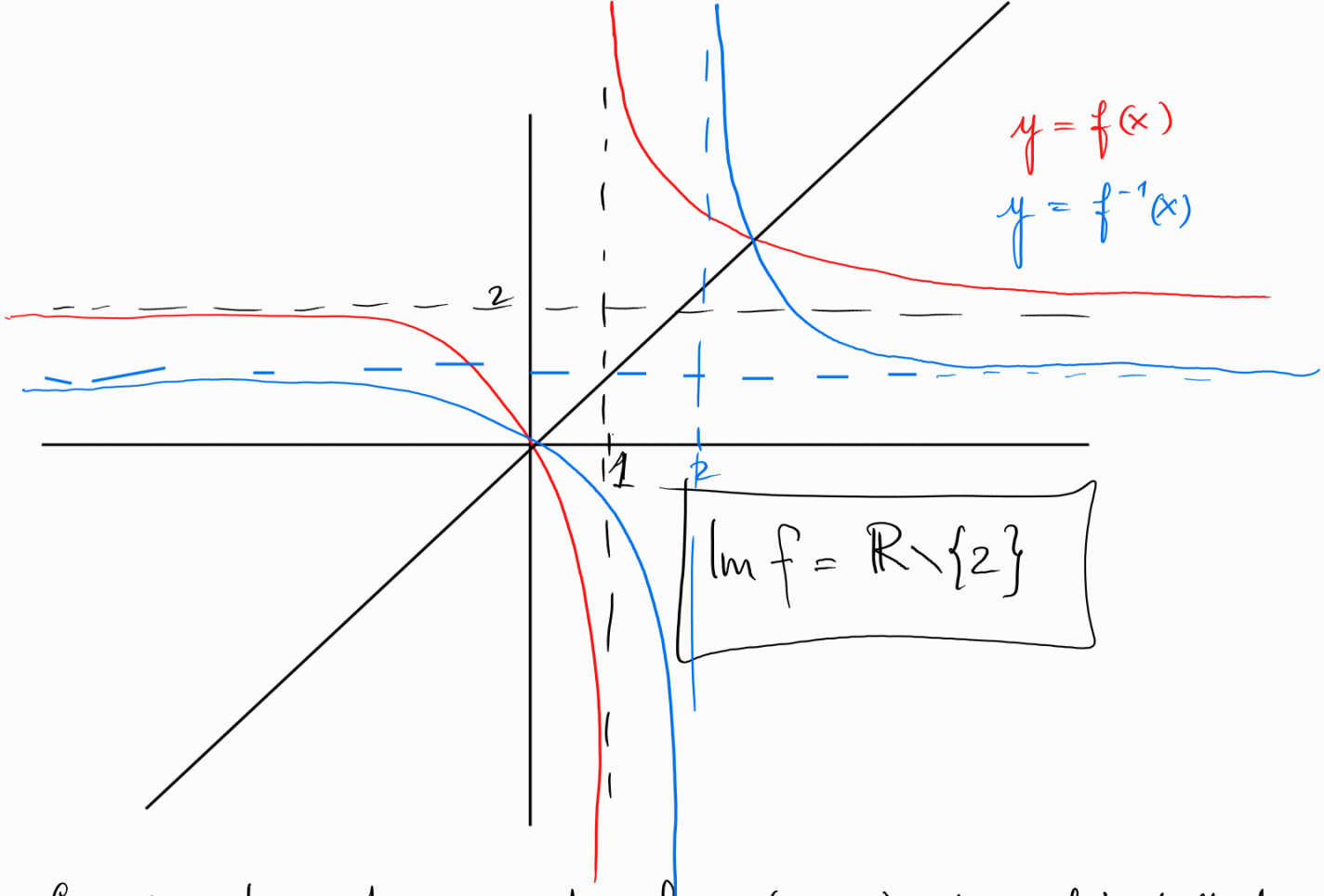
$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

1) dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) im f = ? disegnamo il grafico

$$f(x) = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$





$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Considero la restrizione di f a $(1,+\infty)$, dove f è strett. decresc.

$$\sup f|_{(1,+\infty)} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\inf f|_{(1,+\infty)} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

quindi f assume in $(1,+\infty)$ tutti i valori in $(2,+\infty)$

Analogamente in $(-\infty,1)$ f assume tutti i valori in $(-\infty,2)$.

3) f è iniettiva? sì perché ogni numero in $(2,+\infty)$ è assunto solo 1 volta (in $(1,+\infty)$) in quanto f strett. decrescente in $(1,+\infty)$
ogni numero in $(-\infty,2)$ è assunto solo 1 volta in $(-\infty,1)$ in quanto f è strett. decresc in $(-\infty,1)$

4) $f(x) = \frac{2x}{x-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ è biiettiva.

Per trovare l'inversa, fisso $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e risolvo in x

$x \neq 1$
$y \neq 2$

$$\frac{2x}{x-1} = y \iff 2x = y(x-1) \iff x(y-2) = y$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{y}{y-2}$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{y}{y-2}}$$

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{-x^2 - x + 6}}$$

1) $\text{dom } f = [-3, 2]$

$$-x^2 - x + 6 \geq 0$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 2$$

$x = -3$, $x = 2$.

$$y = -x^2 - x + 6$$

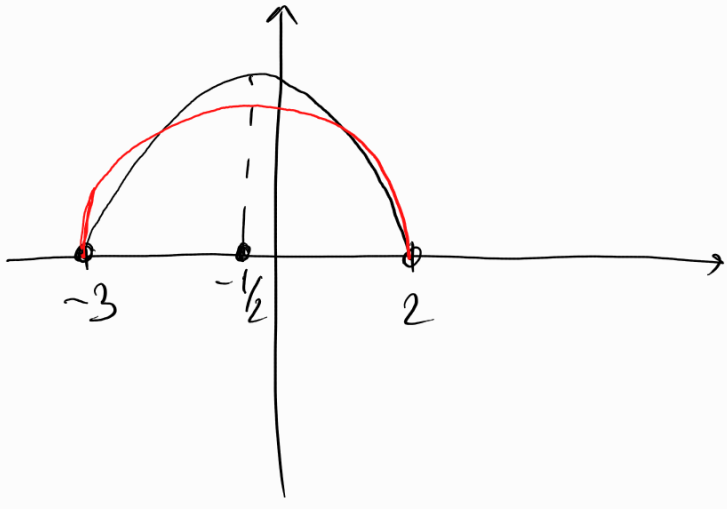
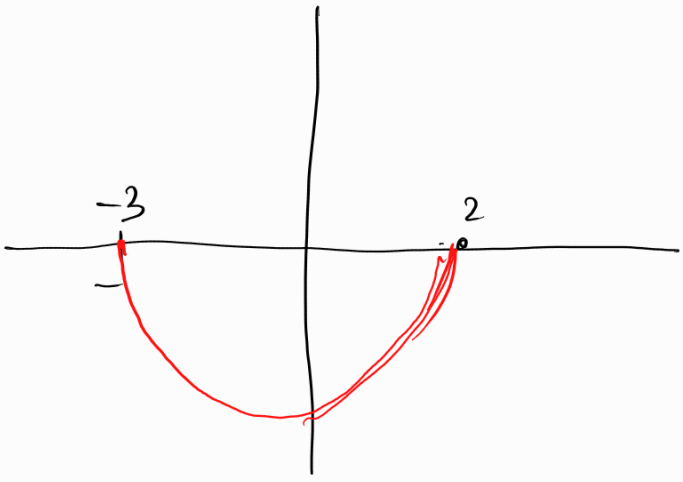
$$y = \sqrt{-x^2 - x + 6}$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = -x^2 - x + 6$$

$$y^2 + x^2 + x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$



$$y = -\sqrt{-x^2 - x + 6}$$