Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \dfrac{e^{|x+1|}}{e^x - 1}$

$$\left[f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2e^x}{e^{x+1}(e^x-1)^2} & \text{se } x < -1 \\[2ex] -\dfrac{e^{x+1}}{(e^x-1)^2} & \text{se } x > 1,\ x \neq 0 \end{cases} \right.$$

$x = -1$ punto angoloso $\Big]$

2) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x}+1)}{x+1}$

$$\left[f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x}+1)}{2(x+1)\sqrt{x}} - \frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{(x+1)^2} \quad \forall x > 0 \right.$$

$x = 0$ pto a tg. verticale $\Big]$

3) $\left(|x^2-1|\left(e^{x-1}-1\right)\right)^{2/3}$

$$\left[f'(x) = \frac{2}{3}\left(|x^2-1|\left(e^{x-1}-1\right)\right)^{-1/3}\left(2x\,\text{sign}(x^2-1)\left(e^{x-1}-1\right) + |x^2-1|\,e^{x-1}\right) \right.$$

$\forall x \neq \pm 1$; $\quad f'(1) = 0$; $\quad x = -1$ cuspide $\Big]$

Mostrare che le seguenti funzioni sono strettamente monotòne, quindi invertibili, nel loro dominio naturale. Calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nei punti indicati:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$, $y = \dfrac{1}{3}$

[$f: [1,+\infty) \to (0,1]$ è strettamente decrescente e biettiva,

$$f^{-1\,\prime}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{f'(2)} = -6$$]

2) $f(x) = \sin \dfrac{x}{|x|+1} + 2x$, $y=0$, $y = 1+\sin\dfrac{1}{3}$;

[$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e biettiva,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}\ ; \quad (f^{-1})'\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{9}{18+4\cos\frac{1}{3}}$$]

3) $f(x) = \sqrt{-x} - \sqrt[3]{x}$, $y=0$, $y=2$

[$f: (-\infty,0] \to [0,+\infty)$ è strett. decrescente e biettiva,

$$(f^{-1})'(0) = 0, \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{6}{5}$$].

Determinare i punti di estremo assoluto delle seguenti funzioni nell'intervallo I indicato:

1) $f(x) = |1 - x^2| + x$, $\quad I = [-2, 2]$

$[\max f = f(2) = 5, \ \min f = f(-1) = -1]$

2) $f(x) = \log\left(x^2 + |3x+5|\right)$, $\quad I = [-2, 2]$

$\left[\max f = f(2) = \log 15, \ \min f = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{11}{4}\right)\right]$

3) $f(x) = \arccos\left(x^2 - 2x^4\right)$ $\quad I = \operatorname{dom} f$

$\left[I = [-1, 1], \ \max f = f(\pm 1) = \pi, \ \min f = f\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \arccos \frac{1}{8}\right]$

4) $f(x) = |x - a|\, e^{-x}$, $\quad I = [a-1, a+2]$, $a \in \mathbb{R}$

$[\max f = f(a-1) = e^{1-a}, \ \min f = f(a) = 0]$