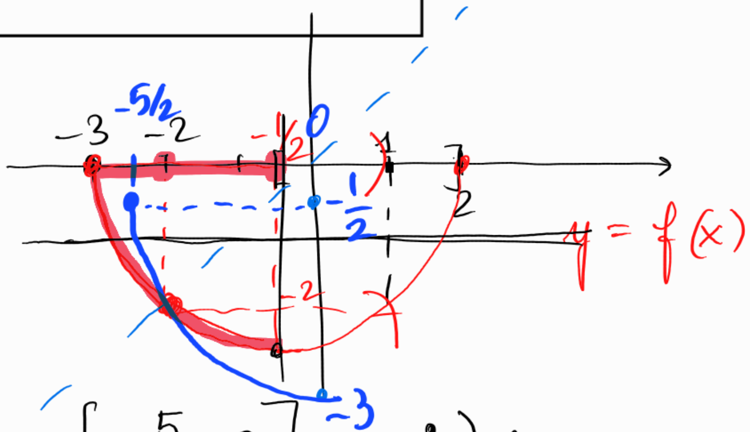
$$\boxed{f(x) = -\sqrt{-x^2-x+6}}$$

1) $\operatorname{dom} f = [-3,2]$




$$y = f^{-1}(x) = -\frac{1+\sqrt{25-4y^2}}{2}$$

2) $\operatorname{im} f = \left[-\frac{5}{2}, 0\right]$

2a) non assume valori $> 0$

non assume valori $< -\frac{5}{2}$.

2b) $f$ è continua in $[-3,2]$

$\Rightarrow$ assume tutti i valori compresi tra

$\inf f = \min f = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

e $\sup f = \max f = f(-3) = f(2) = 0$

3) iniettiva? NO. ogni valore in $\left(-\frac{5}{2}, 0\right]$ è immagine di due punti

Restringo il dominio. Varie opzioni per restringere il dominio

a) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ $f$ iniettiva perché strett. crescente;

b) $\left[-3, -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f$ iniettiva perché strett. decrescente.

c) $[-3,-2] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

d) $\left([-3,-1/2] \cap \mathbb{Q}\right) \cup \left(\left(-\frac{1}{2}, 2\right] \setminus \mathbb{Q}\right)$

etc..

Scegliamo b). $[-3, -1/2]$.

$$f(x)\Big|_{[-3,-1/2]} : [-3,-1/2] \longrightarrow \left[-\frac{5}{2}, 0\right] \text{ biiettiva.}$$

Resta definita $f^{-1} : \left[-\frac{5}{2}, 0\right] \longrightarrow [-3, -1/2]$

$y \longmapsto$ l'unico $x$ t.c. $f(x) = y$

Fisso $y \in \left[-\frac{5}{2}, 0\right]$ e risolvo (in $x$) l'eq$^{ne}$

$$-\sqrt{-x^2-x+6} = y$$

$$-x^2 - x + 6 = y^2$$

$$x^2 + x + y^2 - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(y^2-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25-4y^2}}{2}$$

$\geq 0$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25-4y^2}$$

$$y^2 \leq \frac{25}{4}$$

$$-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$$

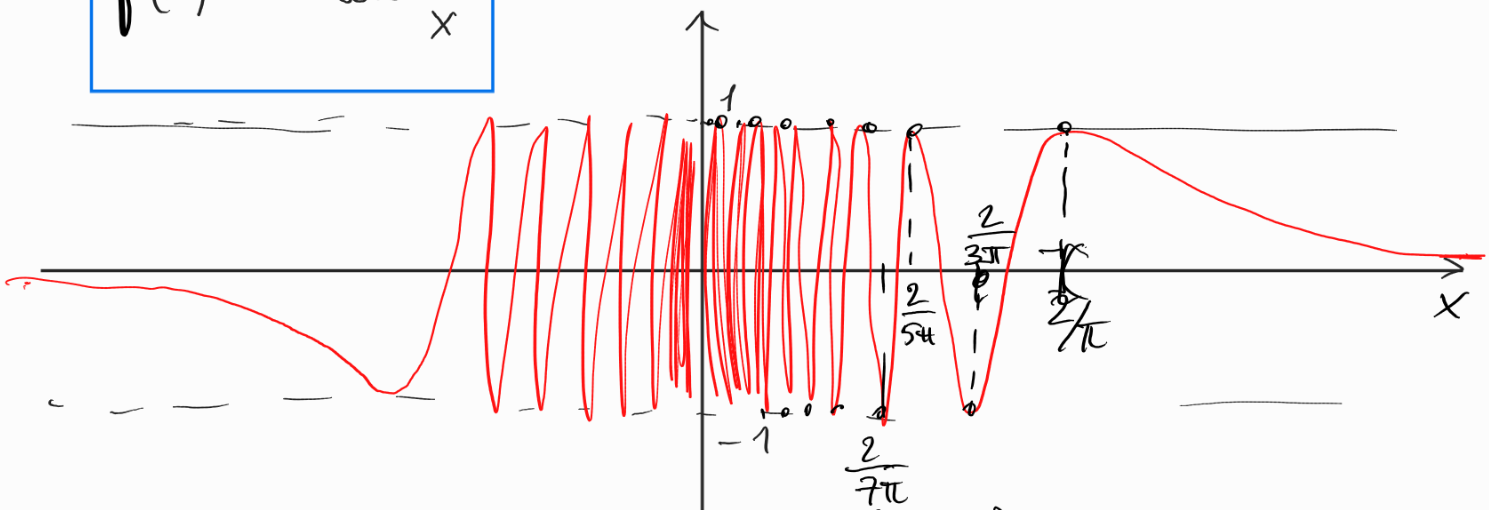
Avendo scelto come "dominio"* $[-3, -1/2]$ la scelta corretta è

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{25-4y^2}$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1+\sqrt{25-4y^2}}{2}$$

---

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$$




1) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) im $f = [-1, 1]$

2a) $f$ non assume valori fuori da $[-1,1]$

2b) $f$ assume il valore 1 per $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\frac{1}{x} = \frac{(4k+1)\pi}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{(4k+1)\pi}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$f$ assume il valore $-1$ per

$$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{2}{(4k-1)\pi}$$

e i valori intermedi.

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{3\pi}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$f$ è continua in $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right] \Rightarrow$

in questo intervallo assume tutti i valori compresi tra $[-1, 1]$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = [-1, 1]$.

2) $f$ è non iniettiva. Devo scegliere un insieme in cui $f$ è iniettiva e conserva la stessa immagine

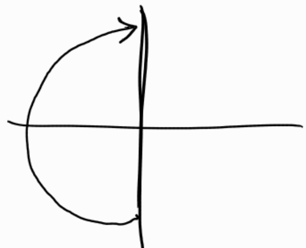
Prendiamo come dominio $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

qui $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ <u>è strett. crescente</u>. $\Rightarrow$ iniettiva.

$$x \in \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$$

se $x$ cresce $\Rightarrow$ $\frac{1}{x}$ decresce da $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ cresce strett. da $-1$ a $1$.



$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big|_{\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]} : \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right] \to [-1, 1]$$

è biiettiva.

$$\exists\, f^{-1} : [-1,1] \hookrightarrow \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$$

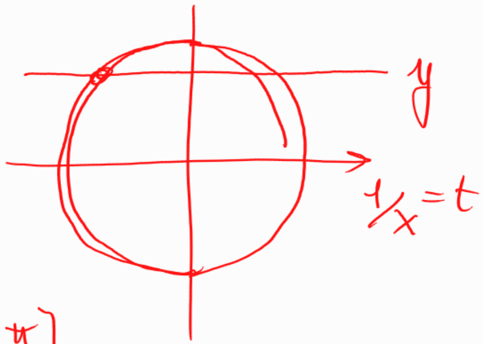
calcoliamola:

$y \in [-1, 1]$ e risolvo nella $x$ $\qquad \frac{1}{x} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = y$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{x} = \arcsin y}$$




Attenzione l'inversa di $\operatorname{sen} t\Big|_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]}$

è $\pi - \arcsin y$

$$\frac{1}{x} = \pi - \arcsin y$$

$$x = \frac{1}{\pi - \arcsin y}$$

Stesso esercizio con

$$f = \sqrt{\log_{1/4}(x^2 - x - 1)}$$

$$f(x) = (x^6 - x^3)^2$$

per casa.