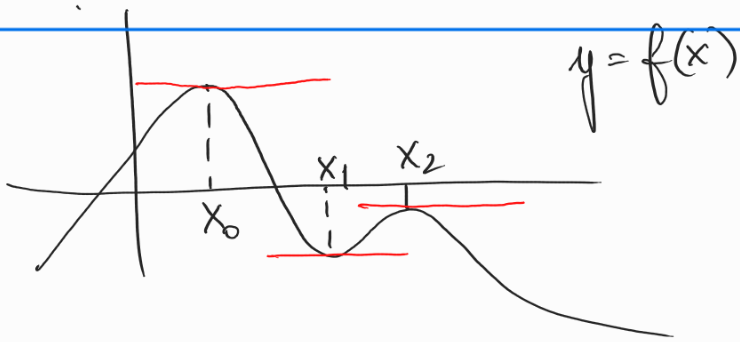
DEF $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ si dice
punto di massimo locale di f (minimo) se $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0
t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ ($\leq$) $\forall x \in \mathcal{U} \cap X$

I pti di massimo o minimo locale si dicono **punti di estremo locale**.

Teorema di Fermat

$f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), derivabile in $x_0 \in I$.
x_0 sia interno a I (non è uno degli estremi dell'intervallo)

Se x_0 è un punto di estremo locale di f, allora $f'(x_0) = 0$



Dim. Supponiamo che x_0 sia di minimo locale per f.
Cioè $\exists$ intorno U di x_0 in cui $f(x) \geq f(x_0)$

Sia $x \in \mathcal{U}$, $x > x_0$ $\quad \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}}$

$$\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} = \boxed{f'(x_0) \geq 0}$$ per la permanenza del segno.

Prendo $x \in \mathcal{U}$ t.c. $x < x_0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0$

$$\lim_{x\to x_0^-} \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \boxed{f'(x_0) \le 0}$$ per la perm. del segno

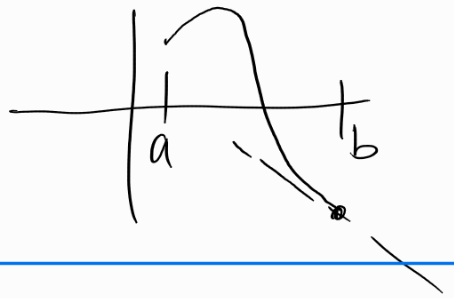
$$\underset{0}{\geq}$$

Quindi $\left.\begin{array}{l} f'(x_0)\geq 0 \\ f'(x_0)\leq 0 \end{array}\right| \Rightarrow f'(x_0)=0.$ $\square$

Attenzione: cosa succederebbe se x_0 fosse uno degli estremi?

Per es. $I=[a,b]$

$\left.\begin{array}{l} x_0=b \text{ pto di minimo locale di } f \\ f \text{ derivabile in } b. \end{array}\right| \Rightarrow f'(b)\leq 0$



DEF Diremo **punto critico (o stazionario)** di f un punto x_0 in cui $f'(x_0)=0$.

Il teorema di Fermat dice:

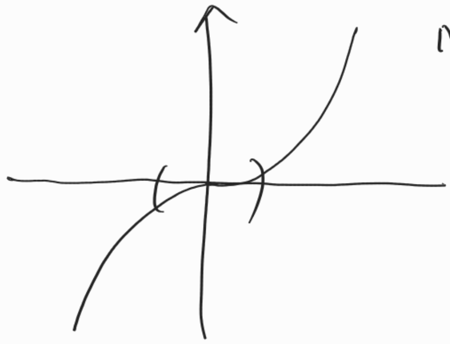
Se x_0 è un punto interno di I in cui f è derivabile, allora:

x_0 è pto di estremo locale di f $\Rightarrow$ x_0 è pto critico di f.

$\boxed{\Leftarrow}$ è falsa. Esistono pti stazionari di f interni a I che non sono pti di estremo locale

Es. $f(x)=x^3$ in $I=\mathbb{R}$. $f'(x)=3x^2=0$ per $x=0$.

Ma $x_0=0$ non è di estremo per $f(x)=x^3$



in quanto f è strettamente crescente.

COROLLARIO del thm. di Fermat.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), e sia x_0 un pto di estremo locale di f. Allora vale una delle seguenti possibilità:

1) x_0 è un punto stazionario di f interno a I;

2) x_0 è uno degli estremi dell'intervallo;

3) x_0 è un punto di non derivabilità di f.

In particolare, se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora per il teor. di Weierstrass esistono pti di massimo e min. assoluti. Poiché essi sono anche pti di estremo locale, rientrano in una delle tre categorie scritte sopra.

Esempio: Trovare max. e min. assoluti di $f(x) = x^3 - 5x + 1$ in $[-1, 2]$. Per il teor. di Weierstrass, questi esistono. Dove sono assunti? Esamino le tre categorie

2) Gli estremi dell'intervallo: $x = -1$, $x = 2$.

3) I punti di non derivabilità: non ce ne sono.

1) I punti critici. $f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

di cui solo $+\sqrt{\frac{5}{3}}$ è nell'intervallo.

Candidati pti di estremo assoluto:

$f(x) = x^3 - 5x + 1$

$x = -1 \qquad f(-1) = -1 + 5 + 1 = 5$ max assoluto di f in $[-1,2]$

$x = 2 \qquad f(2) = 8 - 10 + 1 = -1$

$x = \sqrt{\frac{5}{3}} \qquad f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - 5\sqrt{\frac{5}{3}} + 1 = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 1$

min assoluto di f.

Esercizio: Cerchiamo max. e min. assoluti di

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

dom $f = [-1,1]$, f è continua.

Per Weierstrass esistono max. e min. assoluti. Li cerco

2) gli estremi dell'intervallo: $x = -1$, $x = 1$.

3) i punti di possibile non derivabilità: ~~$x=1$, $x=-1$~~ già considerati

$x = \frac{1}{2}$.

1) i punti critici: Calcolo f' per $x \in (-1,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x + \frac{1}{2} & x \in [-1, \frac{1}{2}) \\ \sqrt{1-x^2} + x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} - 1 & x \in (-1, \frac{1}{2}) \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-1, \frac{1}{2}) \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 = 0 \iff x = -\sqrt{1-x^2} \iff -x = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$x \in (-1, \frac{1}{2})$

$x \leq 0$

$x^2 = 1 - x^2 \iff 2x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ accettabile solo $\boxed{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\begin{cases} x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \end{cases} \iff x = \sqrt{1-x^2} \iff x^2 = 1 - x^2$$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = \sqrt{1-x^2} + |x - \frac{1}{2}|$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ accettabile

I candidati sono

$x = -1 \qquad f(-1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$x = 1 \qquad f(1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ min. assoluto.

$x = \frac{1}{2} \qquad f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}86$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}9$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \simeq 1{,}9$

max ass.

Esercizio: controllare che $x = \pm 1$ sono pti a tg verticale

$x = \frac{1}{2}$ è un pto angoloso

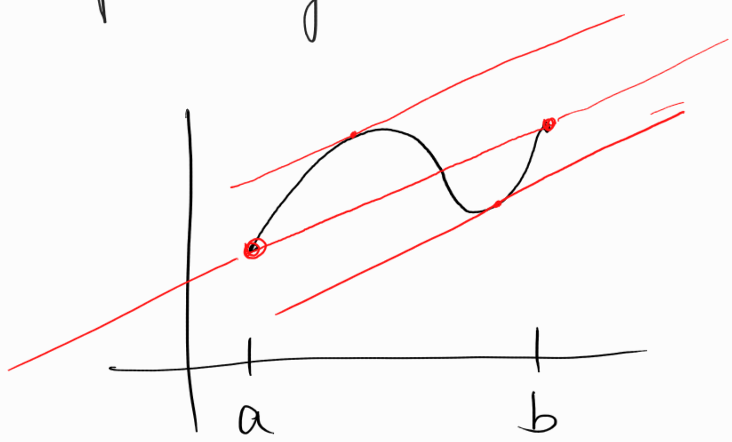
Teorema di Lagrange.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

coeff^{te} angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Interpretazione geometrica

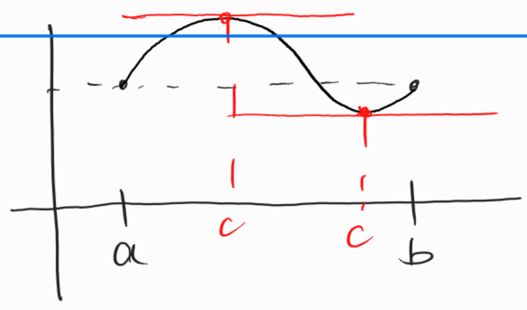


$\Rightarrow \exists$ (almeno) un $c \in (a,b)$ t.c. la retta tg. al grafico di f in $(c, f(c))$ è parallela alla retta disegnata precedentem.

Consideriamo prima il caso particolare in cui $f(a) = f(b)$.

TEOREMA di Rolle

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), t.c. $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$



Dim. di Rolle. Poiché vale Weierstrass, esistono max e min assoluti. 2 possibilità:

1) Entrambi sono assunti agli estremi a e b.

$$\Rightarrow \max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f = f(a) = f(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ è costante in } [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

$\Rightarrow$ ogni c va bene.

2) Almeno uno dei due estremi assoluti è assunto all'interno dell'intervallo. Poiché f è derivabile all'interno, vale Fermat e in tale punto $c \in (a,b)$ si ha
$f'(c) = 0$

$\square$

<u>Dim. Lagrange</u>. Considero una nuova funzione

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

(retta passante per $(a, f(a)), (b, f(b))$:
$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$
)

g verifica le ipotesi di Rolle.

g continua in $[a,b]$? sì perché f lo era.
g derivabile in (a,b)? sì perché f lo era.

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Applico Rolle $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$

ma $g'(x) = \underbrace{f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ $\Updownarrow$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

<u>Teorema di Cauchy</u>.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b).
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.
$$(f(b)-f(a))\, g'(c) = (g(b)-g(a))\, f'(c)$$

La tesi del teorema si scrive spesso come

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ se i denominatori sono $\neq 0$.

dim Cauchy. Si applica Rolle alla funzione

$$h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(x) \qquad \square$$

CRITERIO DIFFERENZIALE DI MONOTONIA

Sia I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I, derivabile nei punti interni di I. Allora

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ crescente in I

2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ decrescente in I

3) $f'(x) > 0 \ \forall x$ interno a $I \implies f$ strett. crescente in I

4) $f'(x) < 0 \ \forall x$ interno a $I \implies f$ strett. decrescente in I.

[In 3) e 4) non vale l'implicazione $\boxed{\Longleftarrow}$

Per es. $f(x) = x^3$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $x = 0$.]

Dim $\boxed{1) \ \Leftarrow}$

Sia f cresente. Studio il segno del rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \forall \text{ coppia } x, x_0 \in I, \ x \neq x_0$$

se $x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \implies$ il rapp. increment. è ≥ 0

$x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \implies$ " " " ≥ 0.

Se in x_0 f è derivabile.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \geq 0$$ per la permanenza del segno.

$\boxed{\text{OSS: se } f \text{ è strett. crescente, } \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \text{ ma il suo limite può anche essere nullo.}}$

Dim $\boxed{1 \Longrightarrow}$ $\boxed{3 \Longrightarrow}$

Supponiamo $f'(x) \geq 0$ $\forall x$ interno a I.

Siano $x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$

Voglio provare che $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Applico Lagrange a $[x_1, x_2] \subseteq I$

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$$ per ipotesi

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$