TEOREMA di WEIERSTRASS

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f ammette max e min. assoluti,

cioè $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$

In particolare f è limitata.

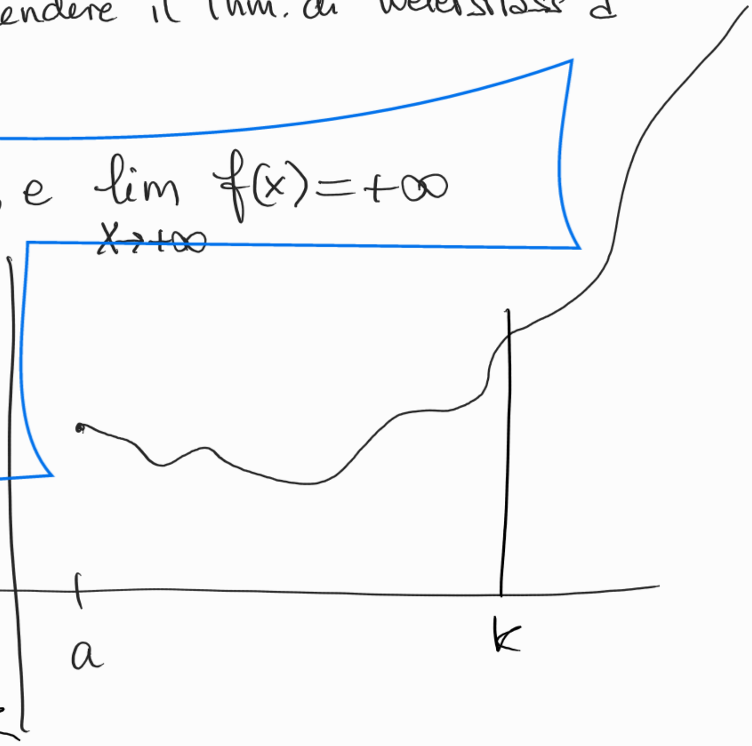
$$\operatorname{im} f = \left[\min_{[a,b]} f \,,\, \max_{[a,b]} f\right]$$

GENERALIZZAZIONI del TEOREMA di WEIERSTRASS

Sotto ulteriori ipotesi, si può estendere il thm. di Weierstrass a intervalli illimitati:

PROP 1 f continua in $[a,+\infty)$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Allora essa ammette min. assoluti.
(cioè $\exists\ x_1 \in [a,+\infty)$ t.c.
$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,+\infty)$)



Dim. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$\Rightarrow \exists\ k > a$ t.c. $f(x) > f(a) \quad \forall x > k$

Applico Weierstrass all'intervallo $[a,k]$.

$\Rightarrow \exists\ x_1 \in [a,k]$ t.c. $f(x_1) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a,k]$

D'altra parte, se $x > k$ $\quad f(x) > f(a) \geq f(x_1)$

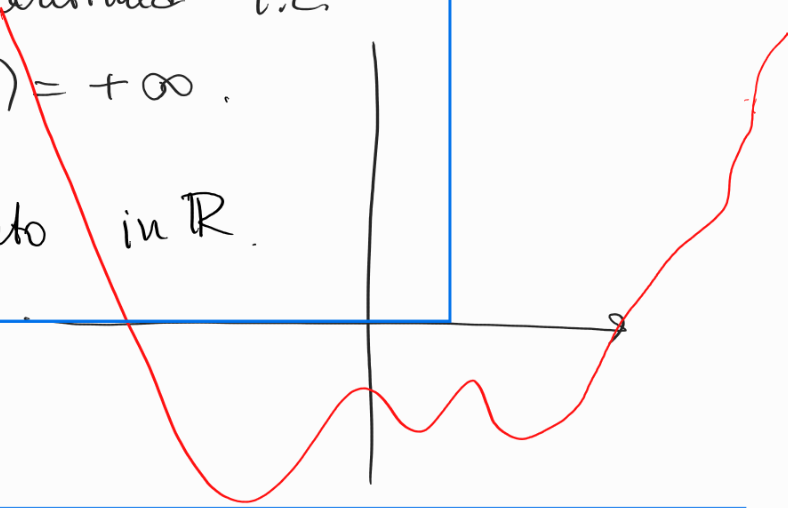
$$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x > k.$$

Quindi $f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,+\infty)$. $\square$

PROP 2 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c.

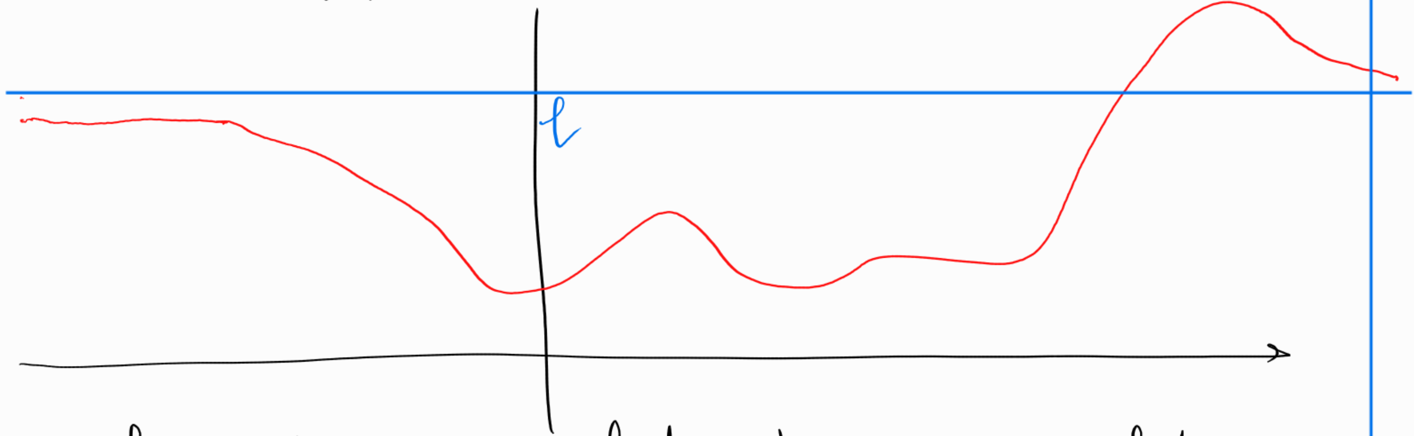
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty .$$

Allora f ammette min. assoluto in $\mathbb{R}$.



PROP 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

t.c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.



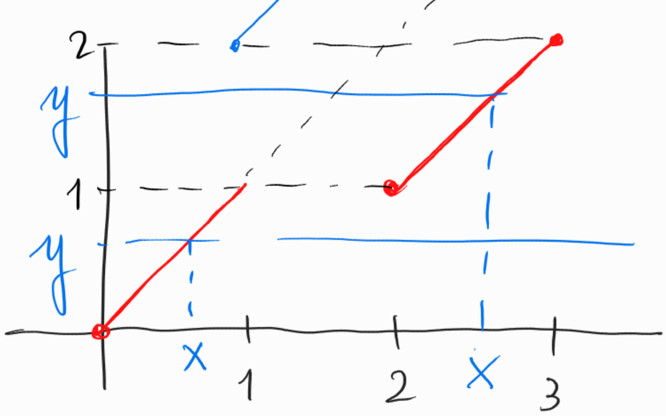
Allora f ammette max. assoluto oppure min. assoluto (almeno uno dei due).

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e biettiva, la sua inversa è continua?

In generale, NO. Esempio:

$$f(x) : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



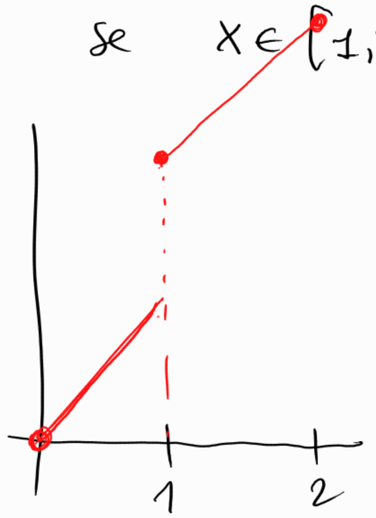
f è continua e biiettiva.

$x - 1 = y$

$$f^{-1} : [0,2] \longrightarrow [0,1) \cup [2,3]$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0,1) \\ y+1 & y \in [1,2] \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ x+1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$



f^{-1} è discontinua

(ha una discontinuità di salto in $x = 1$.

tuttavia con un'ipotesi in più è vero che l'inversa di una f continua è continua.

TEOREMA (Continuità della f. inversa)

Sia $f : I \to J$ continua e biiettiva in I intervallo

(questo implica: 1) f è strett. monotòna in I

2) $J = \operatorname{im} f$ è un intervallo)

Allora $f^{-1} : J \to I$ è continua.

Conseguenze: Le funzioni trigonometriche inverse (arcsin, arccos, arctg) sono continue.

$\arcsin x$ è l'inversa di $\sin x\Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

<u>Dim</u> Supponiamo che f sia strett. crescente in I.
Allora $f^{-1}: \underset{\text{intervallo}}{J} \longrightarrow I$ è strett. crescente in un intervallo.

Mostriamo che f^{-1} è crescente (questo implicherà che f^{-1} è strett. crescente perché iniettiva)

Supponiamo di no.

$\exists\ y_1, y_2 \in J$ t.c. $y_1 < y_2$ $\underbrace{f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)}$

applico f (strett. crescente)

$\Downarrow$

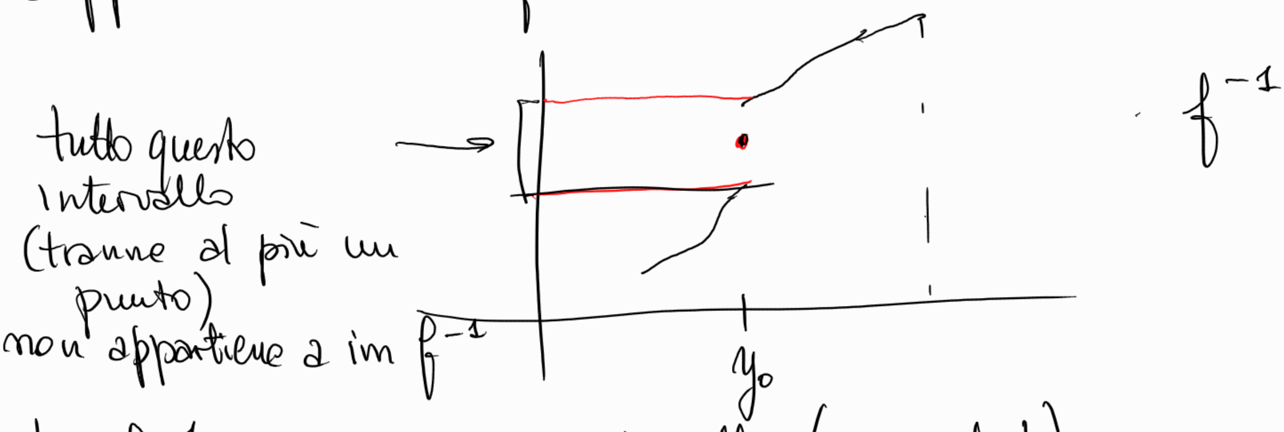
$f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$

$y_1 > y_2$

$\text{im}\, f^{-1} = I$

Se f^{-1} fosse discontinua, le uniche discontinuità possibili sarebbero pti di salto (oppure disc. eliminabili agli estremi)

Supponiamo che f^{-1} abbia un salto



$I = \text{Im}\, f^{-1}$ non è un intervallo (assurdo!)

Se f^{-1} ha una disc. eliminabile agli estremi si ragiona in modo simile.

$\square$

Prossima settimana:

Lun. e Mart. niente geometria. Quindi:

LUN. 10 → 13 Aula Bianchi-Bandinelli

14 → 16 Eserc. Aula 7

MAR. 10 → 13 Aula Bianchi-Bandinelli

14 → 15 Lab. Mat.

MER. Orario regolare

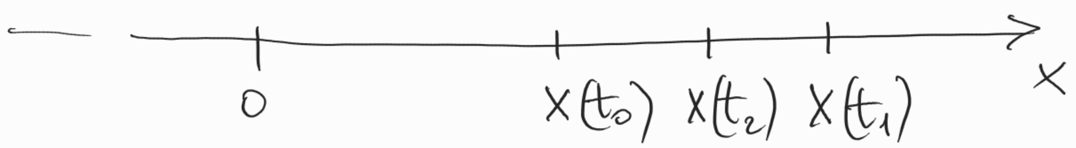
GIOV. Niente Analisi, 4 ore di Geom.

18 → 19 Lab. Mat.

Derivate.

Concetto "cinematico" di derivata (Fisica)

Sia $x(t)$ la posizione all'istante t di un punto che si muove lungo una guida rettilinea.



$t_0 < t_1 < t_2$

Fissati $t_0 < t_1$, considero la velocità media del punto nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

se $t_0 = 0$ sec., $t_1 = 60$ sec.

$x(t_0) = 0$ m $\quad x(t_1) = 900$ m

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{(900-0)\,m}{(60-0)\,s} = 15 \ m/s$$

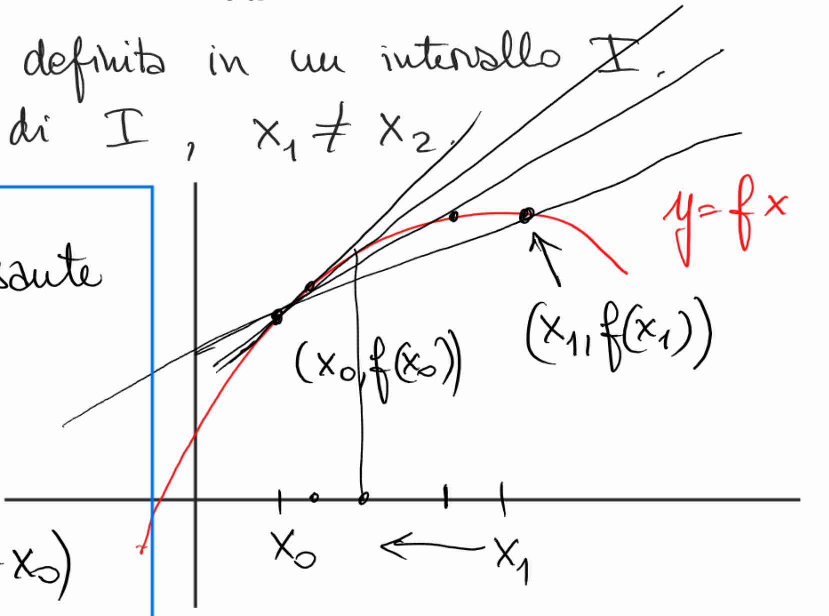
Se voglio avere un'idea della <u>velocità istantanea</u> devo prendere intervalli sempre più brevi.

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Questa è una derivata: la derivata di $x(t)$ rispetto a t nel punto t_0

Concetto "geometrico-analitico" di derivata.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I.
Siano x_1, x_2 due punti di I, $x_1 \neq x_2$.



Equazione della retta passante per $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$x = x_0 \Rightarrow y = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow y = f(x_1)$$

Tenendo fisso x_0, facciamo tendere x_1 a x_0

Intuitivamente, per $x_1 \to x_0$ la retta "diventa" la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

E' naturale imporre che il coefficiente angolare della retta tangente valga

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

DEF. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$, pto non isolato.
f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$x - x_0 = h \to 0$

$x = x_0 + h$

In tal caso $f'(x_0)$ si dice derivata di f in x_0.
La quantità $P(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice rapporto incrementale di f relativo ai punti x_0, x.

Se $f(x) = x^2$, calcoliamo $f'(3)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$x - 3 = h \to 0$

$x = 3 + h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f'(-2)$.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{-2+h} - \dfrac{1}{-2}}{h} =$$

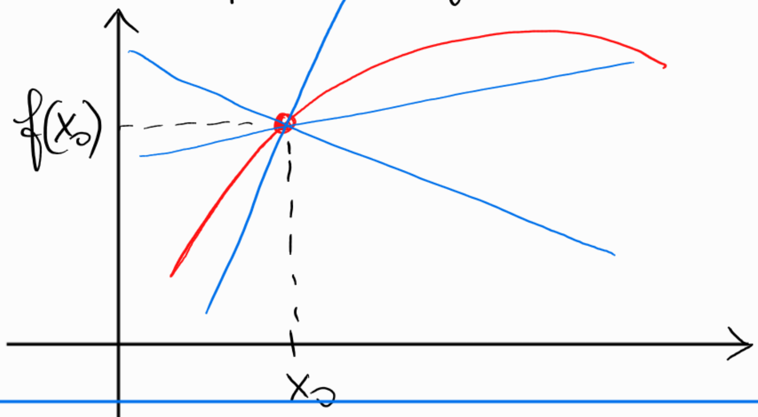
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{-2 - (-2+h)}{(-2+h)(-2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{-2} + \cancel{2} - \overset{-1}{\cancel{h}}}{\underbrace{(-2+h)}_{-2}(-2)} = -\frac{1}{4}$$

Altre notazioni per la derivata:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$. Disegno il grafico di f e considero le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$



Questa retta si dice **retta tangente** al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

Significa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right)$$

cioè $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

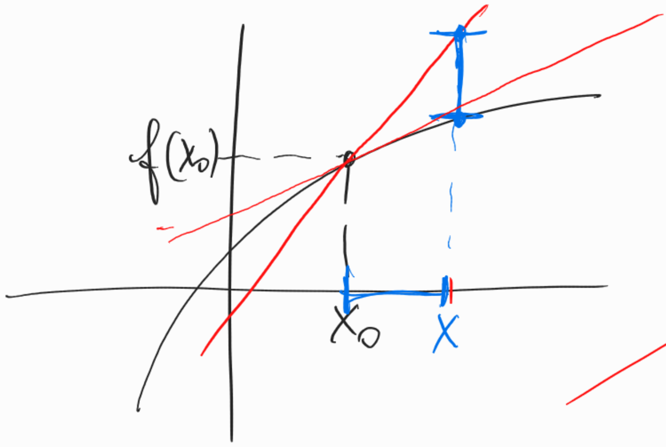
cioè $$f'(x_0) = m.$$

Equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Abbiamo mostrato che:

f è derivabile in x_0 $\Longleftrightarrow$ esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



$f(x_0)$
x_0
x