

① Domanda a)

Definiamo $\psi_n(x)$ come l'autofunzione delle Hamiltoniana per una buca infinita con energia $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ $k_n = \frac{\pi n}{L}$ dove $n: 1, 2, 3, \dots$

In assenza di spin, senza tenere conto di Pauli, lo spettro è

$$E_f = 2E_1 \quad \text{funt. d'onda} \quad \psi_1(x_1)\psi_1(x_2) = \psi_{11}(x_1, x_2)$$

$$E_f = E_1 + E_2 = 5E_1 \quad \begin{cases} \psi_{12S}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) \\ \psi_{12A}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) \end{cases}$$

$$E = 2E_2 = 8E_1 \quad \psi_{22}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1)\psi_2(x_2)$$

La parte di spin può essere scritta come

$$\frac{\alpha}{\hbar} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\alpha}{2\hbar} (S^2 - S_1^2 - S_2^2) = \frac{\alpha}{2\hbar} (S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\hbar\alpha & S=0 \\ \frac{1}{4}\hbar\alpha & S=1 \end{cases}$$

Per trovare lo spettro, ricordiamo Pauli:

• Se ψ spaziale è simmetrica $\Rightarrow S=0$

• Se ψ spaziale è antisimmetrica $\Rightarrow S=1$

Quindi

$$E_f = 2E_1 - \frac{3}{4}\hbar\alpha \quad \psi_{11}(x_1, x_2) |0 \ 0\rangle \quad \text{non degenera}$$

$$E = 5E_1 - \frac{3}{4}\hbar\alpha \quad \psi_{12S}(x_1, x_2) |0 \ 0\rangle \quad \text{non degenera}$$

$$E = 5E_1 + \frac{1}{4}\hbar\alpha \quad \psi_{12A}(x_1, x_2) |1 \ m\rangle \quad \text{degenerazione 3} \\ (m = +1, 0, -1)$$

Domanda b)

Dato che la parte spaziale di ψ è simmetrica, $\chi = |0 \ 0\rangle$.

Per calcolare N determiniamo

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx (4x^2 - L^2)^2 = 2 \int_0^{L/2} dx (4x^2 - L^2)^2 \quad (\text{per simmetria}) \quad (2)$$

$$x = \frac{L}{2} y \quad dx = \frac{L}{2} dy$$

$$= L \int_0^1 dy L^4 (y^2 - 1)^2$$

$$= L^5 \int_0^1 dy (y^4 - 2y^2 + 1) = L^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = L^5 \frac{3 - 10 + 15}{15} = \frac{8}{15} L^5$$

Se definiamo $\psi_0(x) = \sqrt{\frac{15}{8}} (4x^2 - L^2)^{1/2}$

$$\psi = N \sqrt{\frac{8}{15}} L^{5/2} \psi_0(x_1) \sqrt{\frac{8}{15}} L^{5/2} \psi_0(x_2) \chi_1$$

$$= \frac{8}{15} L^5 N \psi_0(x_1) \psi_0(x_2) |00\rangle$$

Dato che $\psi_0(x)$ è normalizzata, $\frac{8}{15} L^5 N = 1 \quad N = \frac{15}{8} L^{-5}$

$$\psi = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2) |00\rangle$$

c) $H = H_0 + H_{\text{spin}} \quad \langle \psi | H_{\text{spin}} | \psi \rangle = -\frac{3}{4} \hbar \alpha$

$$\langle \psi | H_0 | \psi \rangle = 2 \langle \psi_0 | \frac{p^2}{2m} | \psi_0 \rangle \quad \left[\text{ciascuna particella dà lo stesso contributo} \right]$$

$$\frac{p^2}{2m} \psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{15}{8}} \frac{1}{L^{5/2}} \cdot 8$$

$$\langle \psi_0 | \frac{p^2}{2m} | \psi_0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} 8 \left(\sqrt{\frac{15}{8}} \right)^2 \frac{1}{L^{5/2}} \int_{-L/2}^{L/2} dx (4x^2 - L^2) \quad x = \frac{L}{2} y$$

$$= -\frac{15}{2} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{L^5} 2 \frac{L}{2} L^2 \int_0^1 dy (y^2 - 1)$$

$$= -\frac{15}{2} \frac{\hbar^2}{m L^2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 5 \frac{\hbar^2}{m L^2} \quad \langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{10 \hbar^2}{m L^2} - \frac{3}{4} \hbar \alpha$$

d)

Dobbiamo calcolare $|\langle \psi_f | \psi \rangle|^2 = |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|^4$

ψ_1 è lo stato fondamentale della buca
 ψ_0 è la funzione definita sopra

Calcoliamo $A_0(L_z + 2S_z)$ sugli stati.

④

$$|11m\rangle |1S_z\rangle$$

m	S_z	
-1	-1	$-3A\hbar\omega$
-1	0	$-A\hbar\omega$
-1	1	$A\hbar\omega$
0	-1	$-2A\hbar\omega$
0	0	0
0	1	$2A\hbar\omega$
1	-1	$-A\hbar\omega$
1	0	$A\hbar\omega$
1	1	$3A\hbar\omega$

Quindi abbiamo (STATI $n=1$)

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega \quad |11-1\rangle |1-1\rangle \quad \text{non deg.}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega \quad |110\rangle |1-1\rangle \quad \text{non deg.}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - A\hbar\omega \quad \begin{cases} |11-1\rangle |10\rangle \\ |111\rangle |1-1\rangle \end{cases} \quad \text{deg. 2}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad |110\rangle |10\rangle \quad \text{non deg.}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega \quad \begin{cases} |11-1\rangle |11\rangle \\ |111\rangle |10\rangle \end{cases} \quad \text{deg. 2}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega \quad |110\rangle |11\rangle \quad \text{non deg.}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 3A\hbar\omega \quad |111\rangle |11\rangle \quad \text{non deg.}$$

⑤

Vi sono due livelli degeneri di energia

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \pm A\hbar\omega$$

Livello $E = \frac{5}{2}\hbar\omega - A\hbar\omega$

La perturbazione si scrive come

$$B \frac{2\omega}{\hbar} \bar{L} \cdot \bar{S} = \frac{B\omega}{\hbar} (J^2 - L^2 - S^2)$$

$$= \frac{B\omega}{\hbar} J^2 - \frac{B\omega}{\hbar} (2+2)\hbar^2 = \frac{B\omega}{\hbar} J^2 - 4B\hbar\omega$$

I due stati hanno J_z diverso

$$|V_1\rangle = |1\ 1\ -1\rangle |1\ 0\rangle \rightarrow J_z = -1+0 = -1$$

$$|V_2\rangle = |1\ 1\ 1\rangle |1\ -1\rangle \rightarrow J_z = 1-1 = 0$$

Quindi gli elementi di matrice non diagonali sono nulli. Dobbiamo quindi solo calcolare gli elementi di matrice diagonali. Usando le tavole CG (1x1) abbiamo

$$|V_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 2\ -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 1\ -1\rangle$$

$$|V_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} |1\ 1\ 1\ 2\ 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 1\ 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1\ 1\ 1\ 0\ 0\rangle$$

$$\langle V_1 | J^2 | V_1 \rangle = \frac{1}{2} \cdot (2)(2+1)\hbar^2 + \frac{1}{2} 1(1+1)\hbar^2 = 4\hbar^2$$

$$\langle V_2 | J^2 | V_2 \rangle = \frac{1}{6} 2 \cdot 3\hbar^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\hbar^2 = 2\hbar^2$$

Quindi il livello si separa in due livelli

$$|V_1\rangle \quad \Delta E = \frac{B\omega}{\hbar} 4\hbar^2 - 4B\hbar\omega = 0$$

$$|V_2\rangle \quad \Delta E = \frac{B\omega}{\hbar} 2\hbar^2 - 4B\hbar\omega = -2B\hbar\omega$$

Livello $E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$

Il calcolo è analogo

$$|V_1\rangle = |1\ 1\ 1\rangle |1\ 0\rangle \quad J_z = +1$$

$$|V_2\rangle = |1\ 1\ -1\rangle |1\ 1\rangle \quad J_z = 0$$

$$|V_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |11121\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |11111\rangle$$

$$|V_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} |11120\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |11110\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |11100\rangle$$

$$\langle V_1 | J^2 | V_1 \rangle = 4\hbar^2 \quad \langle V_2 | J^2 | V_2 \rangle = 2\hbar^2$$

Il livello si separa in due livelli.

con $\Delta E = 0$ e $\Delta E = -2B\hbar\omega$

c)

i) ci indica che si tratta di uno stato che è combinazione lineare di quelli calcolati al punto a).

ii) $\langle \psi | S_z | \psi \rangle = -\hbar$ ci dice che $S_z | \psi \rangle = -\hbar | \psi \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \langle \psi | S_z | \psi \rangle &= \text{prob}(S_z = -\hbar)(-\hbar) + \\ &\quad \text{prob}(S_z = 0)0 + \\ &\quad \text{prob}(S_z = +\hbar)\hbar \\ &= -\hbar \text{prob}(S_z = -\hbar) + \hbar \text{prob}(S_z = \hbar) \end{aligned}$$

Quindi

$$-\hbar = -\hbar \text{prob}(S_z = -\hbar) + \hbar \text{prob}(S_z = \hbar)$$

$$\text{prob}(S_z = -\hbar) - 1 = \text{prob}(S_z = \hbar)$$

$$\text{Dato che } \text{prob}(S_z = \hbar) \geq 0 \Rightarrow \text{prob}(S_z = -\hbar) - 1 \geq 0$$

$$\text{prob}(S_z = -\hbar) \geq 1$$

Deve pure valere $\text{prob}(S_z = -\hbar) \leq 1$. Quindi

$$\text{prob}(S_z = -\hbar) = 1$$

e quindi $\text{prob}(S_z = 0) = \text{prob}(S_z = \hbar) = 0$.

Quindi $|\psi\rangle$ è autostato di S_z con autovalore $-\hbar$

iii) implica $L_z = \pm \hbar$

Quindi

$$|\psi\rangle = a |11-1\rangle |1-1\rangle + b |111\rangle |1-1\rangle$$

d) $L_+ = L_x + iL_y$ $L_- = L_x - iL_y$ $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

⑦

$$\begin{aligned} L_x |\psi\rangle &= \frac{a}{2} L_+ |11-1\rangle |1-1\rangle + \frac{b}{2} \overbrace{L_+ |111\rangle |1-1\rangle}^{\text{nullo}} \\ &+ \frac{a}{2} \underbrace{L_- |11-1\rangle |1-1\rangle}_{\text{nullo}} + \frac{b}{2} L_- |111\rangle |1-1\rangle \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{2} |110\rangle |1-1\rangle + \frac{b}{2} \sqrt{2} |110\rangle |1-1\rangle \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{2}} |110\rangle |1-1\rangle \end{aligned}$$

$$\langle \psi | L_x^2 | \psi \rangle = |L_x |\psi\rangle|^2 = \frac{|a+b|^2}{2}$$

Se $\langle \psi | L_x^2 | \psi \rangle = 0 \Rightarrow |a+b|^2 = 0 \Rightarrow a = -b$

$$|\psi\rangle = a |11-1\rangle |1-1\rangle - a |111\rangle |1-1\rangle$$

La condizione di normalizzazione impone $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) Utilizzando le tabelle CG (1x1)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{n \quad l \quad m_1 \quad m_2}{|1112-2\rangle} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{1}{6}} |11120\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |11110\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |11100\rangle \right]$$

$$\text{Prob}(J^2 = 6\hbar^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\text{Prob}(J^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}(J^2 = 0) = \frac{1}{6}$$