Esame di Meccanica Quantistica, 31/10/2023

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m vincolate a muoversi in una dimensione sul segmento $-L/2 \leq x \leq L/2$. La Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\alpha}{\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Si assuma $mL^2\alpha \ll \hbar$ e $\alpha > 0$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli.

b) Si consideri lo stato (normalizzato) dato da

$$\psi = N(4x_1^2 - L^2)(4x_2^2 - L^2)\chi_1,$$

dove x_1 ed x_2 sono le posizioni delle due particelle e χ_1 è uno spinore relativo alle due particelle. Si determinino χ_1 e la costante N.

c) Si calcoli $\langle\psi|H|\psi\rangle$.

d) Si calcoli la probabilità che una misura dell'energia dia come risultato l'energia dello stato fondamentale.

Possono essere utili gli integrali

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x^n \cos x, \qquad\qquad J_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x^n \sin x,$$

$I_1 = 0$, $I_2 = \frac{1}{2}(\pi^2 - 8)$, $I_3 = 0$, $I_4 = \frac{1}{8}(\pi^4 - 48\pi^2 + 384)$, $J_1 = 2$, $J_2 = 0$, $J_3 = \frac{3}{2}(\pi^2 - 8)$, $J_4 = 0$.

Esercizio 2. La Hamiltoniana che descrive la dinamica di una particella di massa m e spin 1 è la seguente:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + A\,\omega(L_z + 2S_z) + B\,\frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

dove i parametri adimensionali sono tali che $0 < A \ll 1$ e $0 \leq B \ll 1$.

a) Si assuma $B = 0$. Si determini lo spettro di H. In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico tale che l'energia sia $E < 3\hbar\omega$.

b) Si assuma ora $0 < B \ll A$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, si studi al primo ordine nel parametro B la correzione a tutti i livelli degeneri trovati al punto precedente. Si discuta l'eventuale rimozione delle degenerazione.

c) Si assuma $B = 0$. Ad un certo istante, la particella si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$ tale che:
(i) una misura di H fornisce con certezza un valore $E < 3\hbar\omega$;
(iii) $\langle\psi|S_z|\psi\rangle = -\hbar$;
(iii) una misura di L_z non fornisce mai un valore nullo.
Si scriva l'espressione più generale dgli stati quantistici che soddisfano le condizioni (i), (ii), (iii).

d) Tra gli stati determinati al punto c) si determini quello tale che $\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = 0$.

e) Se viene effettuata una misura di J^2 su $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?