Teorema di esistenza degli zeri

f continua in $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$.

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$.

La dim. suggerisce anche un procedimento di approssimazione della sol^ne.

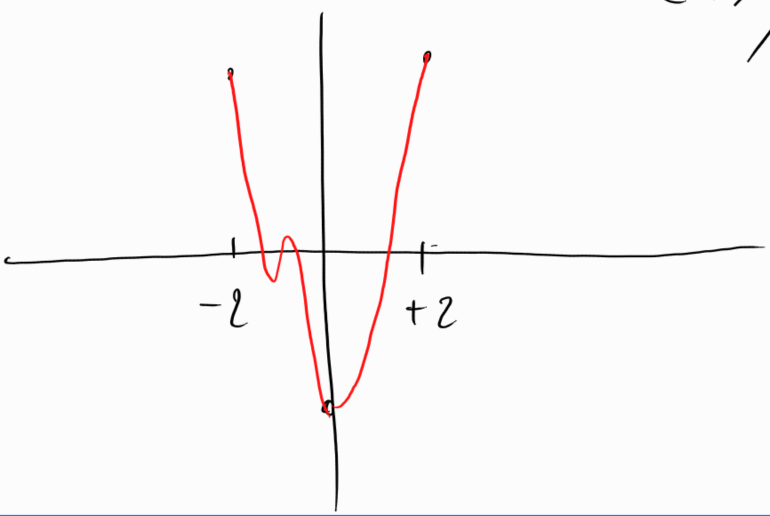
Provare che il polinomio $P(x) = x^6 - x^3 + x^2 - 8$ ammette almeno <u>due</u> zeri nell'intervallo $[-2,2]$.

$P(0) = -8 < 0$

$P(2) = 64 - 8 + 4 - 8 > 0$

$\Rightarrow$ esiste $c \in (0,2)$ t.c. $P(c) = 0$

$P(-2) = 64 + 8 + 4 - 8 > 0 \Rightarrow \exists\, c_1 \in (-2,0)$ t.c. $P(c_1) = 0$



COROLLARIO (Teorema dei valori intermedi)

Sia f continua in I intervallo <u>qualsiasi</u> (aperto, chiuso, limitato, non limitato)

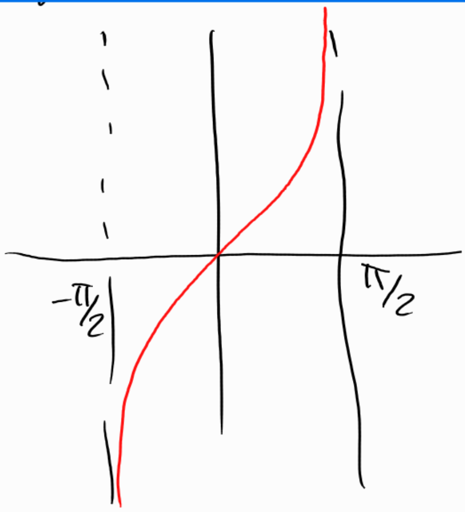
Allora f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Quindi $\mathrm{im}(f) = f(I) = \{ y \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists\, x \in I$ verificante $f(x) = y \}$ è un intervallo.

Il Corollario si può riscrivere così:

Se f è continua in I intervallo, $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo.

Appl. $\operatorname{tg} x$ continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\sup_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\inf_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{tg} x$ assume in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tutti i valori reali

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{R}$$

o equivalentemente

$$\operatorname{tg} x\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{è suriettiva.}$$

$\cos x$ in $[0,\pi]$ è continua.

$$\sup_{x\in[0,\pi]} \cos x = \max_{x\in[0,\pi]} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\inf_{[0,\pi]} \cos x = \min_{[0,\pi]} \cos x = \cos \pi = -1$$

Quindi $\mathrm{Im} \cos x\Big|_{[0,\pi]} = [-1, 1]$.

Dim. del Teor. dei valori intermedi:

Sia λ t.c. $\inf_I f < \lambda < \sup_I f$

Voglio mostrare che $\exists\, c \in I$ t.c. $f(c) = \lambda$.

$\lambda < \sup_I f \Rightarrow \exists\, x_1 \in I$ t.c. $f(x_1) > \lambda$

$\lambda > \inf_I f \Rightarrow \exists\, x_2 \in I$ t.c. $f(x_2) < \lambda$.

Considero l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2

Questo intervallo è un sottointervallo chiuso di I

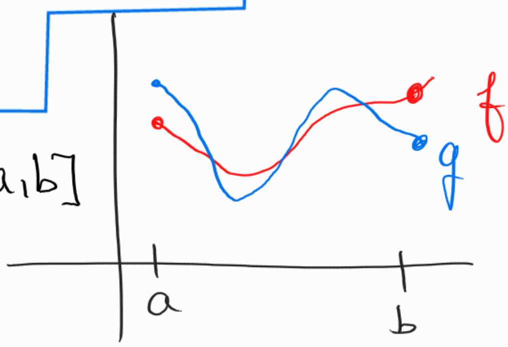
Considero $g(x) = f(x) - \lambda$ continua in $I \Rightarrow$ continua nell'interv. di estremi x_1, x_2.

$g(x_1) = f(x_1) - \lambda > 0$, $g(x_2) = f(x_2) - \lambda < 0$

Applico il teor. degli zeri $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c$ compreso tra x_1 e x_2, quindi $c \in I$,
t.c. $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f(c) = \lambda$. $\square$

COROLLARIO 2 Siano f, g continue in $[a,b]$,
supponiamo $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$.
$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = g(c)$

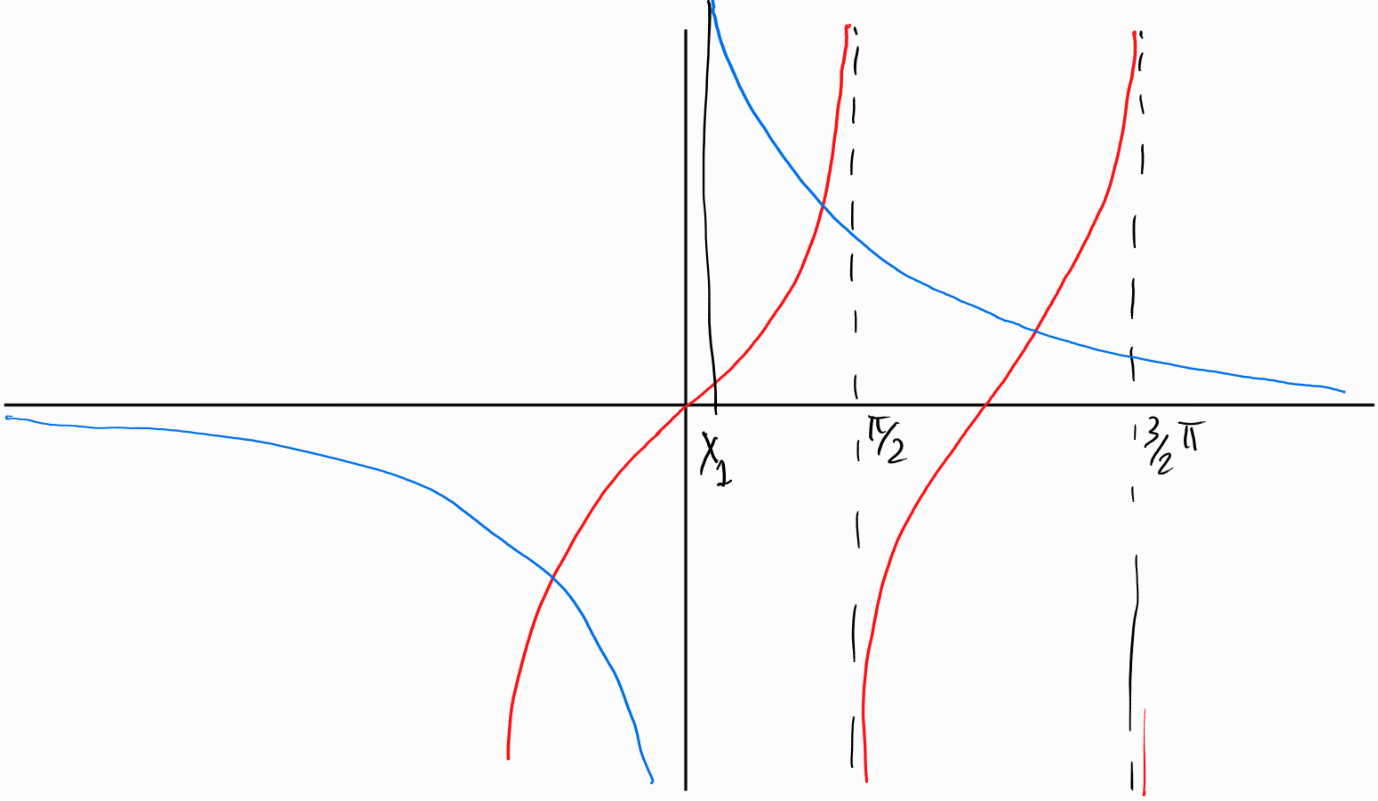


Dim Sia $h(x) = f(x) - g(x)$ continua in $[a,b]$
$h(a) = f(a) - g(a) < 0$, $h(b) > 0$
$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

Quante sol^{ni} ha l'eq^{ne} $\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$?

Le funzioni sono dispari $\Rightarrow$ basta studiare per $x > 0$.
Consideriamo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x = 0$ =

Se prendo $x_1 > 0$ suff^{te} vicino a zero, avrò $\frac{1}{x_1} > \operatorname{tg} x_1$



Poiché $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}$

$\exists\, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\operatorname{tg} x_2 > \frac{1}{x_2}$

Applicando il Corollario 2. a $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists\, c_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

t.c. $\frac{1}{c_0} = \operatorname{tg} c_0$.

Inoltre questo è unico poiché in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x \nearrow$ $\frac{1}{x} \searrow$

Ripetendo il ragionamento in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\exists!\, c_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ t.c.

$\frac{1}{c_1} = \operatorname{tg} c_1$.

e così via... $\Longrightarrow$ infinite soluzioni (una in ogni intervallo della forma $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.)

$k = 1, 2, \ldots$

<u>OSS</u> $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f strett. monotòna $\Longrightarrow$ f iniettiva.

Problema: vale il viceversa, cioè

$$f \text{ iniettiva} \overset{?}{\Longrightarrow} f \text{ strett. monotòna ?}$$

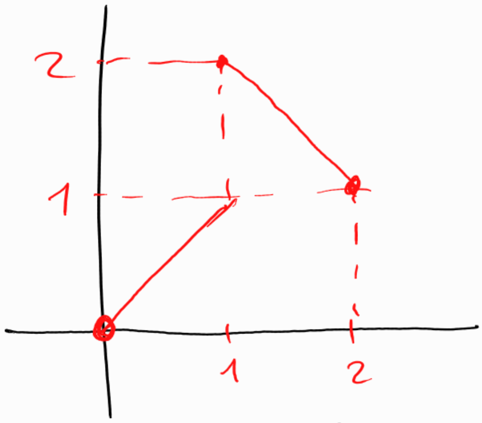
NO $\frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è iniettiva

ma non è monotòna.

Anche se X è un intervallo, la risposta è NO.

$$f(x) : [0,2] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 3-x & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$



f è iniettiva, ma non è monotòna.

Tuttavia la risposta è sì se X è un intervallo e f è continua.

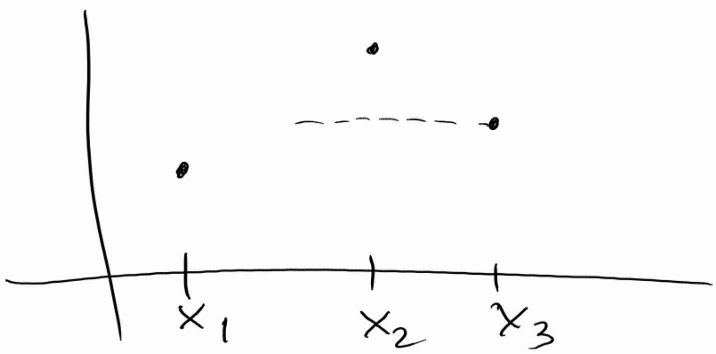
TEOREMA Se $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I intervallo.
Se f è iniettiva, allora essa è strett. monotòna.

Quindi, per funzioni continue in un intervallo,

$$f \text{ iniettiva} \iff f \text{ strett. monotòna.}$$

Dim. Sia f iniettiva. Dimostriamo che f è monotòna.
(perché poi f iniettiva e monotòna $\Rightarrow$ f strett. monotòna).
Supponiamo per assurdo f non monotòna.
$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ $(*)$
oppure $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$

Supponiamo $(*)$



Se $f(x_1)=f(x_3)$, f non è iniettiva $\Rightarrow$ lo escludo.

Suppongo $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ come in figura.

Poiché vale $\nearrow$, applico il teor. dei valori intermedi all'intervallo $[x_1, x_2]$ con $\lambda = f(x_3)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c. $f(c) = f(x_3)$, $c \neq x_3$ $\Rightarrow f$ non iniettiva

<u>assurdo</u>

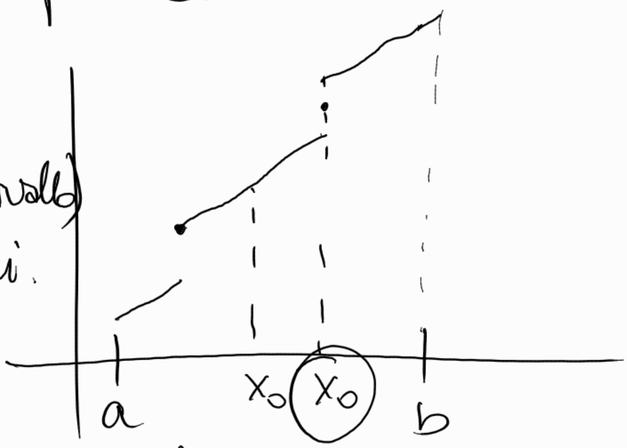
$\square$

Discontinuità di una f. monotòna

f monotòna in I intervallo.

Che tipo di discontinuità può avere?

Risposta:
solo discontinuità di salto
(nei punti interni dell'intervallo)
oppure eliminabili negli estremi.



Sia $x_0 \in (a,b)$ Supponiamo f crescente in I.

$$\exists \underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{\in\mathbb{R}} = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{\in\mathbb{R}}$$

due possibilità: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

cioè f continua in x_0

oppure $\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

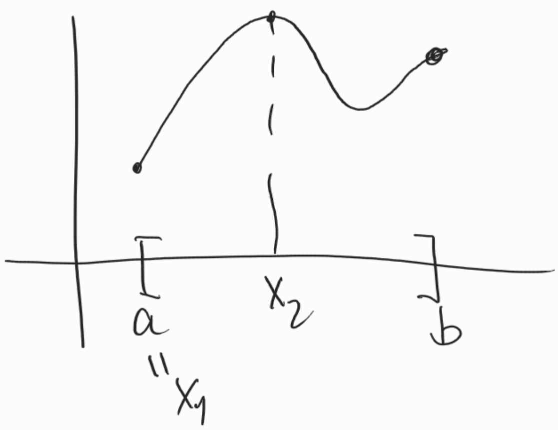
(discontinuità di salto)

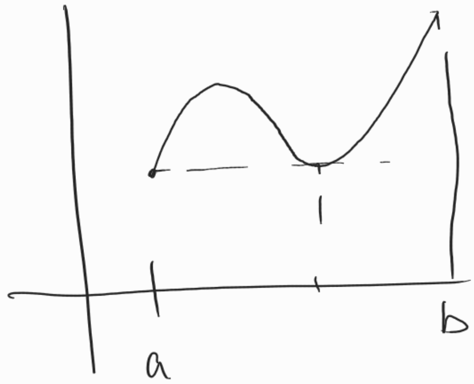
Teorema di Weierstrass

f continua in $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$.
Allora f ammette massimo e minimo assoluti

Cioè: $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \qquad \forall x \in [a,b].$$





Conseguenze del teorema: 1) Una funzione continua in $[a,b]$ è limitata.

2) f continua in $[a,b] \Rightarrow$ im f è un intervallo chiuso e limitato

$$\operatorname{Im} f = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$$

Dim. del Teor. di Weierstrass

Dimostriamo l'esistenza del massimo assoluto di f.

1°) costruiamo una succ^{ne} massimizzante, cioè una succ^{ne} $\{a_n\} \subset [a,b]$ t.c. $f(a_n) \to \sup_{[a,b]} f$

Due casi: i) se $\sup_{[a,b]} f = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \exists\, a_n \in [a,b] \text{ t.c. } \underbrace{\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n}}_{\downarrow n \; \sup f} < f(a_n) \le \sup_{[a,b]} f$$

$$\Rightarrow f(a_n) \to \sup_{[a,b]} f.$$

ii) se invece $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ (poi lo escluderemo, ma al momento non possiamo escluderlo)

$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \exists a_n \in [a,b]$ t.c. $f(a_n) > n \Rightarrow$

$$f(a_n) \to +\infty = \sup f.$$

2ª parte (conclusione)

Per Bolzano-Weierstrass la succ^{ne} limitata $\{a_n\} \subseteq [a,b]$ ammette una sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$ convergente

$$a_{k_n} \longrightarrow x_0$$

OSS $\quad x_0 \in [a,b]$ per la permanenza del segno

$a_{k_n} \to x_0 \in [a,b]$, f continua in $x_0 \Longrightarrow$

$f(a_{k_n}) \longrightarrow f(x_0)$

Ma $\{f(a_{k_n})\}$ è una sotto succ^{ne} di $f(a_n) \longrightarrow \sup_{[a,b]} f$

$\Rightarrow f(a_{k_n}) \longrightarrow \sup_{[a,b]} f$

$\Rightarrow f(x_0) = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow f(x_0) = \max_{[a,b]} f.$ $\square$