ANALISI VETTORIALE per Fisica
– Diario delle lezioni - Settimana n. 3–

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio[1], docente del corso.

Martedì 14 ottobre 2014

- Dimostrazione del Teorema di Fermat.
- **Osservazione:** Se $f(\mathbf{x})$ è una funzione continua in un insieme chiuso e limitato D, allora ammette massimo e minimo assoluti in D. Per il teorema di Fermat tali punti devono appartenere ad una delle seguenti categorie:
  1. punti di non derivabilità di f;
  2. punti critici di f;
  3. punti della frontiera di D.
- **Esercizio:** Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ nell'insieme $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.
- **Esercizio per casa:** Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = x^2+y^2-|x|y$ nell'insieme $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore ed estremo inferiore della funzione $f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$ nel triangolo (aperto) di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.
- Funzioni a valori vettoriali. Funzioni da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^m$.
- **Limiti di funzioni a valori vettoriali.**
- **Osservazione:** Sia $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$. Si ha
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$
se e solo se, indicate con F^j, l^j la j-esima componente di F, $\mathbf{l}$ rispettivamente, si ha
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F^j(\mathbf{x}) = l^j\,, \quad \text{per ogni } j = 1,\dots,m.$$
- Funzioni continue a valori vettoriali.
- Funzioni differenziabili a valori vettoriali.
- Funzioni C^1 a valori vettoriali.
- **Osservazione:** Una funzione a valori vettoriali è continua (risp. differenziabile, C^1) se e solo se ogni componente F^j lo è.
- Funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^N$. **Curve.** Curve piane. Esempi (circonferenza, spirali, elica).

Mercoledì 15 ottobre 2014

- Funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. **Superfici.**
- Come scrivere le superfici di rotazione.
- Equazioni parametriche della sfera.
- **Coordinate sferiche.**
- Equazioni parametriche del toro.
- **Derivate di funzioni composte.**
- **Teorema** (caso particolare della derivata di funzioni composte: Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ aperto, I un intervallo. Se $\mathbf{r}(t) : I \to E$ è derivabile in un certo $t_0 \in I$, e $f : E \to R$ è differenziabile in $\mathbf{r}(t_0)$, allora la funzione composta $f\circ\mathbf{r}$ è derivabile in t_0, e si ha
$$(f\circ\mathbf{r})'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,.$$
- **Teorema** (altro caso particolare della derivata di funzioni composte: Siano $E, F \subset \mathbb{R}^2$ aperti. Siano $f(x,y) : E \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) : F \to E$ due funzioni differenziabili nei loro domini. Allora la funzione composta $f\circ\mathbf{g}$ è differenziabile in F, e si ha
$$(f\circ\mathbf{g})_u(u,v) = f_x(\mathbf{g}(u,v))x_u(u,v) + f_y(\mathbf{g}(u,v))y_u(u,v)\,;$$
$$(f\circ\mathbf{g})_v(u,v) = f_x(\mathbf{g}(u,v))x_v(u,v) + f_y(\mathbf{g}(u,v))y_v(u,v)\,.$$
- **Teorema** (caso generale): Siano $F(\mathbf{y}) : E \subset R^N \to \mathbb{R}^k$, $G(\mathbf{x}) : A \subset R^m \to E$ due funzioni differenziabili rispettivamente negli aperti A, B. Allora $F\circ G : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile, e si ha
$$J_{F\circ G}(\mathbf{x}) = J_F(G(\mathbf{x}))\,J_G(\mathbf{x})\,,$$
dove a secondo membro figura il prodotto righe per colonne delle matrici J_F e J_G nei punti indicati. La precedente formula equivale a
$$(F^j\circ G)_{x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^{N} F^j_{y_h}(G(\mathbf{x}))G^h_{x_i}(\mathbf{x})\,,$$
per ogni $j = 1,\dots,k$, ogni $i = 1,\dots,m$. Qui F^j, G^h rappresentano le componenti di F, G, rispettivamente. *(senza dimostrazione questo caso generale).*

[1] Con qualche aiuto da:
Andrea Lombardini Trio - Alt 88
Pierrejean Gaucher - Zappe Zappa
Mike Keneally Band - Bakin' @ The Potato
Joan Baez - Any Day Now
John Coltrane - Giant Steps

- **Esercizio:** Scrivere l'espressione per le derivate parziali di
$$f(xy^2, \sqrt{x+y^4})\,,$$
dove f è una generica funzione regolare di due variabili.

- **Esercizio:** Supponendo che una funzione $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia data in coordinate polari, ossia nella forma $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, calcolare le derivate parziali di f a partire da quelle di g e viceversa.

- **Derivate parziali del secondo ordine. Funzioni di classe C^2. Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana**

- **Esercizio:** Calcolare le derivate parziali seconde di $f(x,y) = xe^{xy^2}$.

- **Teorema di Schwarz** (s.d.)

- **Osservazione:** la matrice hessiana è simmetrica.

Venerdì 17 ottobre 2014

- **Formula di Taylor del primo ordine con il resto di Peano per funzioni di più variabili**.

- **Formula di Taylor del primo ordine con il resto di Lagrange per funzioni di più variabili**.

- **Formula di Taylor del secondo ordine con il resto di Peano per funzioni di più variabili**.

- Problema della classificazione dei punti critici.

- **Punti di massimo relativo, di minimo relativo, di sella.**

- **Esempi importanti:** classificazione dell'unico punto critico di $f(x,y) = x^2 + y^2$, di $f(x,y) = x^2 - y^2$, di $f(x,y) = -x^2 - y^2$, di $f(x,y) = xy$.

- Richiami su **autovalori di una matrice** e metodo per la loro determinazione. **Equazione caratteristica.**

- **Matrice definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, non definita.** Esempi.

- **Teorema di classificazione dei punti critici attraverso lo studio della matrice hessiana.**

- **Osservazione:** Se la matrice hessiana in un punto critico è solo semidefinita positiva (o negativa), allora non si può decidere la natura del punto critico solo dallo studio delle derivate seconde.

- **Esercizio:** Trovare e classificare i punti critici di $f(x,y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2)$
